פתרון מבחן מתכונת מס' 21

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן: x – מהירות ההליכה של נועם.

y – מהירות ההליכה של יובל.

	מהירות	זמן	דרך
נועם	x	2.5	$2.5x$
יובל בתנועה	y	$\frac{A}{y}$	$2.5x+\frac{2}{5}\cdot 2.5x=A$
יובל במנוחה	–	$\frac{10}{60}$	–

משוואה I:

נועם ויובל שהו במשך אותו זמן בדרך: $\frac{A}{y}+\frac{1\cancel{0}}{6\cancel{0}}=2.5$

$$\frac{2.5x+2.5x\cdot\frac{2}{5}}{y}+\frac{1}{6}=2.5 \quad \Big/ -\frac{1}{6}$$

$$\frac{2.5x+x}{y}=\frac{7}{3}$$

$$3.5x=\frac{7y}{3}$$

$$x=\frac{2}{3}y \qquad \mathrm{I}$$

נרכז את הנתונים על זמן תנועה לאורך קילומטר אחד בטבלה:

	מהירות	זמן	דרך
נועם	x	$\frac{1}{x}$	1
יובל	y	$\frac{1}{y}$	1

יובל עובר קילומטר אחד ב-5 דקות פחות מנועם.

כלומר: משוואה II:

$$\frac{1}{x}-\frac{5}{60}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{12}=\frac{1}{y} \quad \Big/ \cdot 12xy$$

$$12y-xy=12x$$

נציב משוואה I במשוואה II:

$$12y-y\left(\frac{2}{3}y\right)=12\left(\frac{2}{3}y\right)$$

$$12y-\frac{2y^2}{3}=8y$$

$$4y-\frac{2y^2}{3}=0 \quad \Big/ \cdot 3$$

$$12y-2y^2=0$$

$$2y(6-y)=0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$y=0 \qquad y=6$$

לא ייתכן $\qquad \Downarrow$

$$x=\frac{2}{3}\cdot 6=4$$

תשובה:

מהירות ההליכה של נועם: 4 קמ"ש.

מהירות ההליכה של יובל: 6 קמ"ש.

פתרון שאלה 2

נוסחה:
$$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$

1. בסדרה הנדסית נתון: $n = 12$

$S_6 = 189$ ראשונים החל ב-a_1

$S_6 = 12096$ אחרונים החל ב-a_7

משוואה I: $\frac{a_1\left(q^6 - 1\right)}{q-1} = 189$

משוואה II: $\frac{a_1 q^6\left(q^6 - 1\right)}{q-1} = 12096$

נחלק משוואה II במשוואה I ונקבל:

$$\frac{a_1 q^6\left(q^6 - 1\right)}{q-1} : \frac{a_1\left(q^6 - 1\right)}{q-1} = \frac{12096}{189}$$

$$\frac{\cancel{a_1} q^6\left(\cancel{q^6 - 1}\right)}{\cancel{q-1}} \cdot \frac{\cancel{q-1}}{\cancel{a_1}\left(\cancel{q^6 - 1}\right)} = 64$$

לאחר צמצום נקבל: $q^6 = 64 \,/\sqrt[6]{\ }$

$q = \pm 2$

נציב במשוואה I לקבלת a_1:

$$q = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1\left(2^6 - 1\right)}{2-1} = 189 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3$$

$$q = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1\left((-2)^6 - 1\right)}{-2-1} = 189 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -9$$

תשובה: $a_1 = 3$ או $a_1 = -9$

2. א. נתונה הסדרה: $a_{n+1} = 3a_n + 5$ *

הסדרה b_n מוגדרת על-פי הנתון:

$b_n = a_n + p$ **

כלומר: $b_{n+1} = a_{n+1} + p$ (1)

וכמו כן בדרך נוספת: $b_{n+1} = 3b_n$ (2)

כלומר b_n הוא סדרה הנדסית אשר מנתה 3.

נשווה את הביטויים (1) ו-(2)

ונקבל: $\underbrace{a_{n+1}}_{*} + p = 3 \cdot \underbrace{b_n}_{**}$

נציב על-פי הנתון:

$$3a_n + 5 + p = 3(a_n + p)$$
$$3a_n + 5 + p = 3a_n + 3p$$
$$5 = 2p$$
$$\boxed{2.5 = p}$$

ב.

$$a_{12} + b_{12} = a_{12} + (a_{12} + p) = 2a_{12} + 2.5$$
$$2a_{12} + 2.5 = 568.5$$
$$2a_{12} = 566$$
$$\boxed{a_{12} = 283} \qquad b_{12} = a_{12} + 2.5 = 285.5$$

פתרון שאלה 3

נסמן: A - מועמד עובר בהצלחה את מבחן הקבלה

B - מועמד עובר בהצלחה את הריאיון

נוסחת ברנולי:

$$P_n(k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

נוסחה:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}$$

א. 1. נתון: $P(A)=0.62$

$P(B/A)=0.8$

$$\Leftarrow \quad \frac{P(B\cap A)}{0.62}=0.8$$

$$\Downarrow$$

$$P(B\cap A)=0.496$$

תשובה: $\mathrm{P}=0.496$

2. $$P\left(\begin{array}{c}\text{לכל היותר}\\ \text{אחד יתקבל}\end{array}\right)=\binom{8}{0}(0.496)^0(0.504)^8+\binom{8}{1}(0.496)^1(0.504)^7=$$

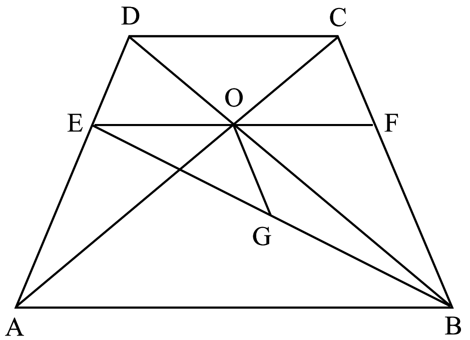
$$=0.00416+0.0327=0.0369$$

3. $$P\left(\begin{array}{c}\text{בדיוק}\\ \text{אחד}\\ \text{התקבל}\end{array}\Big/\begin{array}{c}\text{לכל היותר}\\ \text{אחד}\\ \text{התקבל}\end{array}\right)=\frac{0.0327}{0.0369}=0.886$$

ב. נתון: $n=5 \quad P(B/A)=0.8$

$$P\left(\begin{array}{c}\text{לפחות אחד}\\ \text{יעבור ריאיון}\end{array}\right)=1-\binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^5=0.99968$$

פתרון שאלה 4



א. $AB \parallel DC$ נתון

$$\frac{DO}{OB}=\frac{CO}{OA}$$ משפט תלס

$\Downarrow$

$$\frac{DO}{DB}=\frac{CO}{CA}$$

$EO \parallel AB$ נתון, המשכי מקבילים

$\Downarrow$

$$\frac{EO}{AB}=\frac{DO}{DB}$$ משפט תלס

$OF \parallel AB$ נתון, המשכי מקבילים

$\Downarrow$

$$\frac{OF}{AB}=\frac{CO}{CA}$$ משפט תלס

$\Downarrow$

$$\frac{OE}{AB}=\frac{OF}{AB}$$ העברה

$AB = AB$ גודל שווה לעצמו

$\Downarrow$

$EO=OF$ מ.ש.ל. א.

ב. $OG \parallel BC$ נתון

$\Downarrow$

$EG = GB$ קטע במשולש היוצא מאמצע צלע אחת ומקביל לשלישית חוצה גם את הצלע השנייה.

ג. נתון: $DC = a$

$$\Downarrow$$

$$AB = 2a$$

$$\frac{DC}{AB} = \frac{DO}{OB} = \frac{1}{2}$$ יחסים על-פי משפט תלס

$$\Downarrow$$

$$\frac{DO}{DB} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{EO}{AB} = \frac{DO}{DB}$$ יחסים על-פי משפט תלס

$$\frac{EO}{2a} = \frac{1}{3}$$

$$EO = \frac{2a}{3}$$

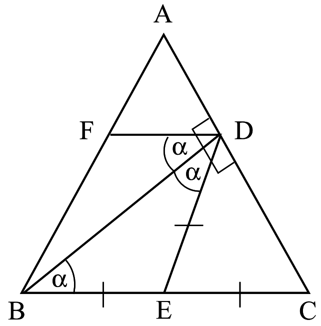
$$\Downarrow$$

$$EO = OF = \frac{2a}{3}$$ על-פי סעיף א.

$$\Downarrow$$

$$EF = \frac{4a}{3}$$ מ.ש.ל. ג.

פתרון שאלה 5



א. נתון $BD \perp AC$

$\Downarrow$

$BDC = 90°$

$BE = EC$ נתון, DE תיכון לצלע BC.

$\Downarrow$

$DE = BE = EC$ תיכון ליתר במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר.

$\sphericalangle FDB = \sphericalangle EDB = \alpha$ נתון + הצבה

$\Downarrow$

$\sphericalangle DBE = \alpha$ זוויות שוות מול צלעות שוות ב-ΔDEB

$\Downarrow$

$\sphericalangle FDB = \sphericalangle DBE = \alpha$ זווית מתחלפות שוות

$\Downarrow$

$FD \| BC$ מ.ש.ל.

ב. $FD \| BC$ הוכח כא

$\Downarrow$

$$\frac{FD}{BC} = \frac{AD}{AC}$$ משפט תלס

$BC = BE + EC$

$BE = DE$ תיכון ליתר במשולש ישר-זוויות

$\Downarrow$

$BC = 2DE$

$$\frac{FD}{2DE} = \frac{AD}{AC}$$

$\Downarrow$

$$\frac{FD}{DE} = \frac{2AD}{AC}$$ מ.ש.ל.

ג. $\sphericalangle ABD = 30°$ נתון

$\sphericalangle ADB = 90°$ נתון

$\Downarrow$

$AB = 2AD$ הניצב מול זווית בת $30°$ במשולש ישר-זווית שווה למחצית היתר.

$AD = X$ הצבה

$BD =$ 6 ס"מ נתון

על-פי משפט פיתגורס ב-ΔABD

$$6^2 + x^2 = (2x)^2$$

$$36 = 3x^2$$

$$12 = x^2$$

$$\sqrt{12} = x = AD$$

$\Downarrow$

$AB = 2\sqrt{12} =$ 6.92 ס"מ

$DE =$ 5 ס"מ נתון

משפט פיתגורס ב-ΔBDC

$$6^2 + DC^2 = 10^2$$

$DC =$ 8 ס"מ

$\Downarrow$

$$AC = \sqrt{12} + 8 = 11.46$$

נציב בהתאם להוכחה בסעיף ב.

$$\frac{FD}{5} = \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{12}+8}$$

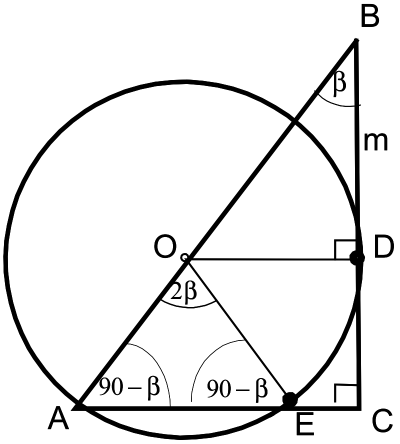
$$FD = 3.02$$

תשובה: $AD \underset{\text{ס"מ}}{=} \sqrt{12}$, $AB \underset{\text{ס"מ}}{=} 2\sqrt{12}$, $FD \underset{\text{ס"מ}}{=} 3.2$

פתרון שאלה 6

נתבונן ב- ΔBOD.

$OD \perp BD$ – רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.



$$\tan\beta = \frac{OD}{m}$$

$$\boxed{OD = m\tan\beta}$$

$$\cos\beta = \frac{m}{OB}$$

$$OB = \frac{m}{\cos\beta}$$

$AO = OD = OE$ – רדיוסים

לכן נקבל כי:

$$\boxed{AB = AO + OB = m\tan\beta + \frac{m}{\cos\beta}}$$

נתבונן ב- ΔAOE.

על-פי משפט הסינוסים:

$$\frac{AE}{\sin 2\beta} = \frac{m\tan\beta}{\sin(90-\beta)}$$

$$\boxed{\sin(90-\beta) = \cos\beta}$$

$$AE = \frac{m\tan\beta\sin 2\beta}{\cos\beta} = \frac{2m\frac{\sin\beta}{\cancel{\cos\beta}}\cdot\sin\beta\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\beta} = \frac{2a\sin^2\beta}{\cos\beta} = 2m\tan\beta\sin\beta$$

תשובה: $AB = m\tan\beta + \frac{m}{\cos\beta}$, $AE = 2m\tan\beta\sin\beta$

פתרון שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^4+ax^2}{(x^2+1)^2}$

א. נמצא את שיפוע המשיק כאשר $x=1$

$$f'(x)=\frac{(4x^3+2ax)(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(x^4+ax^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$f'(1)=\frac{4(4+2a)-8(1+a)}{16}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{16+8a-8-8a}{16}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

שיפוע המשיק הוא $\frac{1}{2}$ והוא אינו תלוי ב- a.

ב. נמצא את משוואת המשיק כאשר $x=1$

$$f(1)=\frac{1+a}{4}$$

$$y-\frac{1+a}{4}=\frac{1}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1+a}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{a-1}{4}$$

המשיק פוגש את ציר ה- y $\Leftarrow$ $\frac{a-1}{4}=\frac{1}{2}$

$$\boxed{a=3}$$

משוואת המשיק: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ג. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

$$g'(x)=\frac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}$$

כלומר:

$$\int f(x)dx=g(x)$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\left.\frac{x^3}{x^2+1}\right|_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx=\left.\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right|_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

מבוקש $S=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

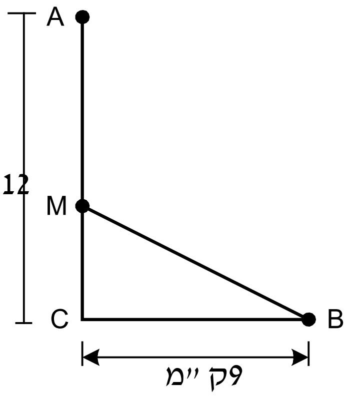
פתרון שאלה 8

נסמן: $CM = x$ ומכאן: $AM = 12 - x$

נתון: 9 ק"מ $BC =$, לכן, על-פי משפט פיתגורס ב- ΔBCM : $MB = \sqrt{x^2 + 81}$.

נסמן: y – המסלול BMA כפונקציה של זמן:

מהירות	זמן	דרך	
V	$\frac{\sqrt{x^2+81}}{V}$	$\sqrt{x^2+81}$	$B \rightarrow M$
$2.6V$	$\frac{12-x}{2.6V}$	$12-x$	$M \rightarrow A$



$$y = \frac{\sqrt{x^2+81}}{V} + \frac{12-x}{2.6V}$$

נגזור לקבלת מינימום:

$$y' = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}V\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{2.6V} = 0$$

$$2.6Vx - V\sqrt{x^2+81} = 0 \quad / :V > 0$$

$$2.6x = \sqrt{x^2+81} \quad / (\ )^2$$

$$6.76x^2 = x^2 + 81$$

$$5.76x^2 = 81 \quad / :5.76$$

$$x^2 = 14.0625 \quad / \sqrt{\ }$$

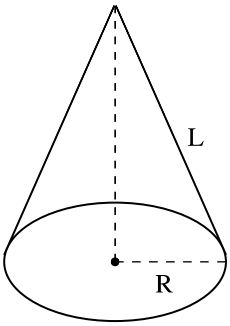
$$x = 3.75$$

בדיקת מינימום:

$x > 3.75$	3.75	$0 < x < 3.75$	x
+	מינימום	–	y'
↗		↘	y

תשובה: הנקודה M צריכה להימצא במרחק 3.75 ק"מ מהנקודה C , כדי שזמן הנסיעה של הג'יפ יהיה מינימלי.

פתרון שאלה 9



א. x - גובה החרוט

ריבוע רדיוס המעגל (פיתגורס): $R^2 = L^2 - x^2$

נפח החרוט: $V = \frac{\pi R^2 \cdot x}{3}$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(L^2x - x^3\right)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\left[L^2 - 3x^2\right] = 0$$

$$3x^2 = L^2$$

$$x^2 = \frac{L^2}{3} \quad /\sqrt{\ }$$

$$x = \pm\frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$V''(x) = \frac{\pi}{3}\left[-6x\right]$$

$V''\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{6L}{\sqrt{3}} < 0$ לכן מקסימלי.

תשובה: גובה החרוט: $\frac{L}{\sqrt{3}}$

ב. נסמן: $\sphericalangle ABO = x$

$\sin x = \frac{AO}{L}$ $\quad$ $\cos x = \frac{OB}{L}$

$AO = L\sin x$ $\quad$ $OB = L\cos x$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}(L\cos x)^2 \cdot L\sin x = \frac{\pi L^3}{3}\cdot\cos^2 x \ \sin x$$

$$V'(x) = \frac{\pi L^3}{3}\left[-2\cos x\sin^2 x + \cos^3 x\right] = 0$$

$$\cos x\left[-2\sin^2 x + \cos^2 x\right] = 0$$

$\cos x = 0$ $\quad$ $2\sin^2 x = \cos^2 x$

$x = 90^\circ + 180k$ $\quad$ $\tan^2 x = \frac{1}{2}$

$x = 90^\circ$ $\quad$ $\tan x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

לא יתכן

$x = 35.26°$ x זווית חדה

תשובה: $35.26°$

נבדוק מקסימום באמצעות טבלה

x		$35.26°$	
$V'(x)$	$+$		$-$
$V(x)$	$\nearrow$	מקסימום	$\searrow$

ג. נבטא את נפח הגוף עבור $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\left[L^2 \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^3\right] = \frac{\pi L^3}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^3}\right] = 0.128\pi L^3$$

נפח הגוף עבור $x = 35.26°$

$$V(x) = \frac{\pi L^3}{3}\left[\left(\cos 35.26\right)^2 \cdot \sin 35.26\right] = 0.128\pi L^3$$

תשובה: $0.128\pi L^3$

פתרון מבחן מתכונת מס' 22

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן:

x – הזמן הדרוש לצינור א כדי למלא לבדו את הבריכה.

$3x$ – הזמן הדרוש לצינור ב כדי למלא לבדו את הבריכה.

$3x:80\%=3.75x$ – הזמן הדרוש לצינור ג כדי למלא לבדו את הבריכה.

$\frac{1}{x}$ – הספק לשעה של צינור א.

$\frac{1}{3x}$ – הספק לשעה של צינור ב.

$\frac{1}{3.75x}$ – הספק לשעה של צינור ג.

	זמן	הספק (בשעה)	עבודה
צינור א	5	$\frac{1}{x}$	$\frac{5}{x}$
צינור ב	5	$\frac{1}{3x}$	$\frac{5}{3x}$
צינור ג	5	$\frac{1}{3.75x}$	$\frac{5}{3.75x}$

המשוואה:

$$\frac{5}{x}+\frac{5}{3x}+\frac{5}{3.75x}=1$$

$$\frac{5}{x}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.75})=1$$

$$\frac{5}{x}\cdot 1.6=1$$

$$\frac{8}{x}=1 \quad /\cdot x$$

$$\boxed{x=8}$$

תשובה:

הזמן הדרוש לצינור א כדי למלא לבדו את הבריכה: 8 שעות.

הזמן הדרוש לצינור ב כדי למלא לבדו את הבריכה: 24 שעות.

הזמן הדרוש לצינור ג כדי למלא לבדו את הבריכה: 30 שעות.

פתרון שאלה 2

1. א. נתון $a_{n+1} = a_n + 4$, כלומר a_n הוא סדרה חשבונית שהפרש הוא 4.

על-פי הכלל נבטא את a_{n+2} באמצעות a_n.

נתון: $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + 4 = a_n + 4 + 4 = a_n + 8$

כלומר, $b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_n + 4 + a_n + 8 = 3a_n + 12$ $b_1 = 27$ $\Leftarrow$ $\boxed{b_n = 3a_n + 12}$

$b_{n+1} = 3a_{n+1} + 12 = 3(a_n + 4) + 12 = 3a_n + 24$ $\Leftarrow$ $\boxed{b_{n+1} = 3a_n + 24}$

נוכיח כי b_n הוא סדרה חשבונית:

$b_{n+1} - b_n = 3a_n + 24 - 3a_n - 12 = 12$

הפרש הסדרה b_n הוא 12,

נתון: $a_1 = 5$, $b_1 = 3a_1 + 12 = 27$

תשובה: $b_1=27$

ב. נוסחה ל-b_n כפונקציה של n:

$b_n = 27 + (n - 1)12$

$b_n = 12n + 15$

נוסחה:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

ג. נתון $a_n = 81$, כלומר $81 = 5 + (n - 1)\,4$

מפתרון המשוואה נקבל: $\boxed{n = 20}$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left[2 \cdot 27 + 19 \cdot 12\right] = 2820$$

נוסחה:

$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$

נוסחאות:

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$

2. המכונית עברה דרך של 1860 במשך 5 ימים כלומר:

משוואה (1) $S_5 = 1860$

$$1860 = \frac{a_1(q^5 - 1)}{q-1}$$

ביומיים הראשונים עברה דרך הקטנה פי 4 מאשר ביומיים הבאים אחריהם.

כלומר: משוואה (2) $4(a_1 + a_2) = a_3 + a_4$

$$4(a_1 + a_1 q) = a_1 q^2 + a_1 q^3$$

נוציא גורם משותף משני צידי משוואה זו ונקבל:

$$4a_1(1+q) = a_1 q^2 (1+q) \quad \Big/ \begin{matrix} : a_1 \neq 0 \\ 1+q \neq 0 \end{matrix}$$

$$4 = q^2$$

$$q = \pm 2$$

מרחק אינו שלילי לכן $q = 2$

נציב $q = 2$ במשוואה (1) ונקבל:

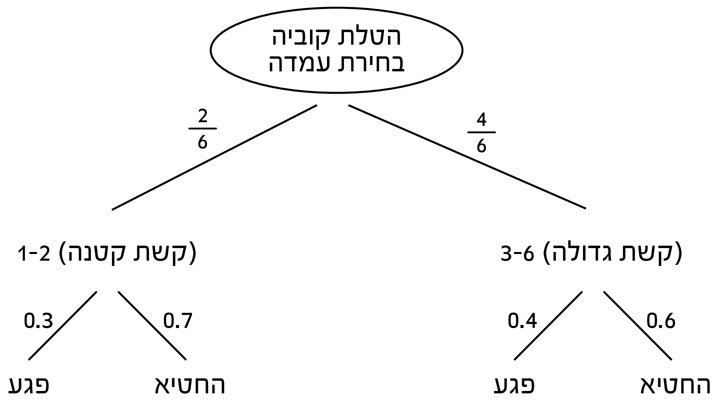
$$1860 = \frac{a_1(2^5 - 1)}{2-1}$$

$$1860 = 31 \cdot a_1 \quad /:31$$

$$a_1 = 60$$

תשובה: המכונית עבר דרך של 60 ק"מ ביום הראשון.

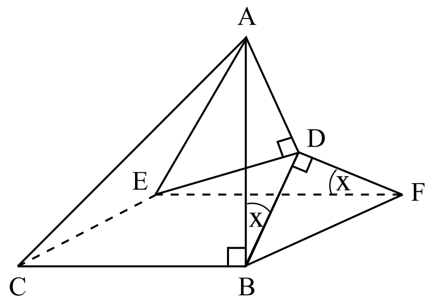
פתרון שאלה 3



א. $P(\text{פגע}) = \frac{2}{6}\cdot 0.3 + \frac{4}{6}\cdot 0.4 = \frac{11}{30}$

ב. $P\left(\text{קשת קטנה} / \text{פגע}\right) = \frac{\frac{2}{6}\cdot 0.3}{\frac{11}{30}} = \frac{3}{11}$

פתרון שאלה 4



א. צ"ל: $AB = EF$

הוכחה: נתבונן ב-ΔADB וב-ΔEDF

$AD = DE$ נתון משולש שווה־שוקיים

$BD = DF$ נתון משולש שווה־שוקיים

$\sphericalangle EDB = \alpha$ הצבה

$\sphericalangle BDF = \sphericalangle ADE = 90°$ נתון משולש ישר־זווית

$\Downarrow$

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle EDF = 90° + \alpha$ סכום זוויות

$\Downarrow$

$\Delta ADB \cong \Delta EDF$ (צ.ז.צ)

$\Downarrow$

$AB = EF$ צלעות מתאימות במשולשים חופפים

ב. $\sphericalangle ABC = 90°$ נתון

$\sphericalangle DFE = \sphericalangle DBA = x$ הצבה + זוויות מתאימות במשולשים חופפים

$\sphericalangle DFB = \sphericalangle FBD = 45°$ נתון משולש ישר־זווית ושווה־שוקיים

$\Downarrow$

$\sphericalangle BFE = 45° - x$ חיסור זוויות

$\sphericalangle CBF = 90° + x + 45° = 135° + x$ חיבור זוויות

$\Downarrow$

$\sphericalangle CBF + \sphericalangle BFE = 180°$

ג. מתוצאות סעיף ב' נקבל

$EF \parallel CB$ זוויות חד-צדדיות שסכומן 180°

$AB = EF$ הוכח בסעיף א'.

$AB = CB$ נתון

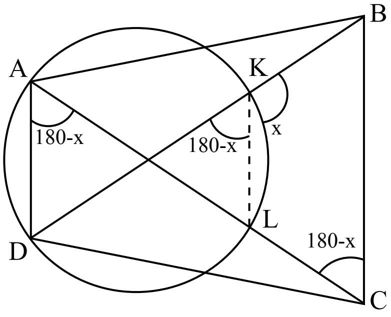
$\Downarrow$

$EF = CB$ כלל המעבר

$\Downarrow$

$BCEF$ מקבילית, אם במרובע זוג צלעות נגדיות מקבילות ושוות המרובע הוא מקבילית.

פתרון שאלה 5



נתון: המרובע KBCL בר-חסימה

$\Downarrow$

$\sphericalangle BKL + \sphericalangle BCL = 180°$ במרובע חסום במעגל סכום הזווית הנגדית הוא 180°

$\sphericalangle BKL = x$ הצבה

$\Downarrow$

$\sphericalangle BCL = 180° - x$ חישוב

$\sphericalangle DKL = 180° - x$ זוויות צמודות

$\Downarrow$

$\sphericalangle DAL = 180° - x$ זוויות הקפיות על אותה קשת $\overset{\frown}{DL}$ שוות.

$\Downarrow$

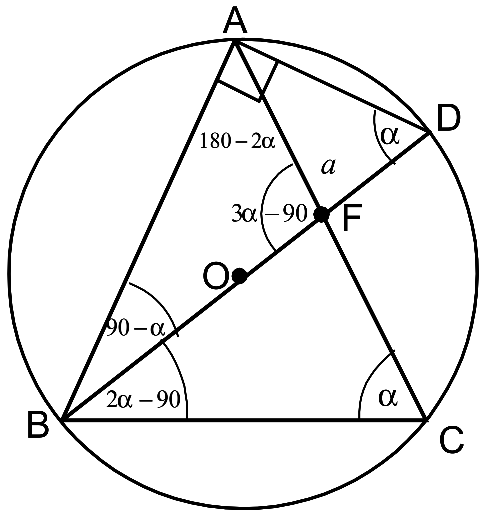
$AD \parallel BC$ זוויות מתחלפות שוות. מ.ש.ל.

פתרון שאלה 6

א. נתון: AB=AC

$\sphericalangle BCA = \alpha$

$AF = a$



בניית עזר: נחבר את A ל- D (המשך BF) על המעגל.

$\sphericalangle BAD = 90^\circ$ – זווית היקפית הנשענת על קוטר

$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BCA = \alpha$ – זוויות היקפיות על אותה קשת

$\sphericalangle BAC = 180-2\alpha$ – סכום זוויות ב- ΔABC

$\sphericalangle ABD = 90-\alpha$ – סכום זוויות ב- ΔABD

$\sphericalangle DBC = 2\alpha-90$ – סכום זוויות ב- ΔABC

$\sphericalangle AFB = 3\alpha-90$ – זווית חיצונית ל- ΔBFC

נתבונן ב- ΔAFB:

$$\frac{a}{\sin(90-\alpha)} = \frac{AB}{\sin(3\alpha-90)}$$

$$AB = \frac{a\sin(3\alpha-90)}{\sin(90-\alpha)} \Rightarrow AB = \frac{-a\sin(90-3\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{-a\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$$

זהויות

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$

נתבונן ב- ΔBAC:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(180-2\alpha)}$$

$$BC = \frac{AB\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{-a\cos 3\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cdot 2\cancel{\sin\alpha}\,\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\sin\alpha}}$$

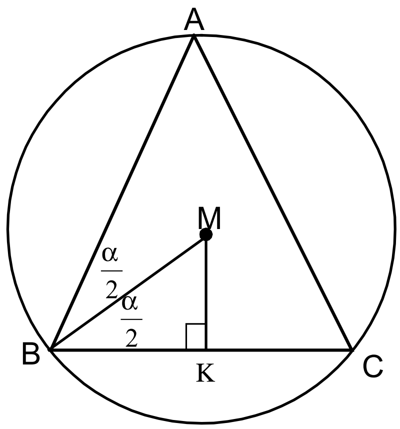
$$\boxed{BC = -2a\cos 3\alpha}$$

רדיוס המעגל **החסום**:

M – מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש

חוצי זוויות המשולש.

$$\Leftarrow \quad \sphericalangle ABM = \sphericalangle MBK = \frac{\alpha}{2}$$



במשולש שווה-שוקיים מרכז המעגל החסום ומרכז המעגל החוסם

נמצאים על הגובה לבסיס ולכן הוא גם תיכון.

נתבונן ב- ΔMBK :

$$BK = \frac{1}{2}BC = -a\cos 3\alpha$$

MK – רדיוס המעגל החסום.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{MK}{-a\cos 3\alpha}$$

$$MK = -a\cos 3\alpha \tan\frac{\alpha}{2}$$

ב. נתון: $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$$\frac{BC}{\sin(180-2\alpha)} = 2R \quad \text{נציב BC מסעיף א} \quad BC = -2a\cos 3\alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{-a\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}$$

מסעיף קודם: $r = MK = -a\cos 3\alpha \tan\frac{\alpha}{2}$

נתון: $\frac{R}{r} = \frac{25}{12}$

כלומר: $$\frac{R}{r} = \frac{-a\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} : -a\cos 3\alpha \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{-a\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{1}{-a\cos 3\alpha \tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{25}{12}$$

$$\frac{1}{\sin 2\alpha \cdot \tan\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} = \frac{25}{12}$$

$$\sin 2\alpha = 0.96$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \sqrt{1-0.96^2} = \sqrt{0.0784} = 0.28$$

תשובה: $\cos 2\alpha = 0.28$

פתרון שאלה 7

א. נתונה הפונקציה: $y=\dfrac{bx-2}{\sqrt{ax^2-bx}}$.

על-פי הנתון, האסימפטוטות נחתכות בנקודה $(2,2)$, כלומר:

$x=2$ היא אסימפטוטה אנכית

$y=2$ היא אסימפטוטה אופקית.

נציב $x=2$ במכנה ונשווה לאפס:

$$a\cdot 2^2-2b=0$$

$$4a=2b$$

נקבל משוואה I: $\boxed{2a=b}$

אסימפטוטה אופקית:

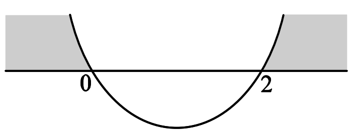
$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx-1}{\sqrt{ax^2-bx}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(b-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{a-\frac{b}{x}}}= \begin{cases}\nearrow \lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{b}{\sqrt{a}}\\ \searrow \lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{-b}{\sqrt{a}}\end{cases}$$

על-פי הנתון $\dfrac{b}{\sqrt{a}}=2$, נקבל משוואה II, כלומר:

$$\begin{cases}b=2\sqrt{a}\\ b=2a\end{cases}$$

$$2a=2\sqrt{a}\quad /:2$$

$$a=\sqrt{a}$$



$$\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)=0$$

$$\downarrow \qquad \sqrt{a}=1$$

$a=0$ $\qquad \boxed{a=1} \qquad b=2$

לא ייתכן

תשובה: $a=1$ $\quad b=2$.

ב.   הפונקציה: $f(x)=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}$

תחום ההגדרה: $x^2-2x>0$

$x<0$ או $x>2$

נמצא את נגזרת הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2-2x}-(2x-2)\left(\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}\right)}{x^2-2x}=$$

$$=\frac{4\left(x^2-2x\right)-(2x-2)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}\left(x^2-2x\right)}=$$

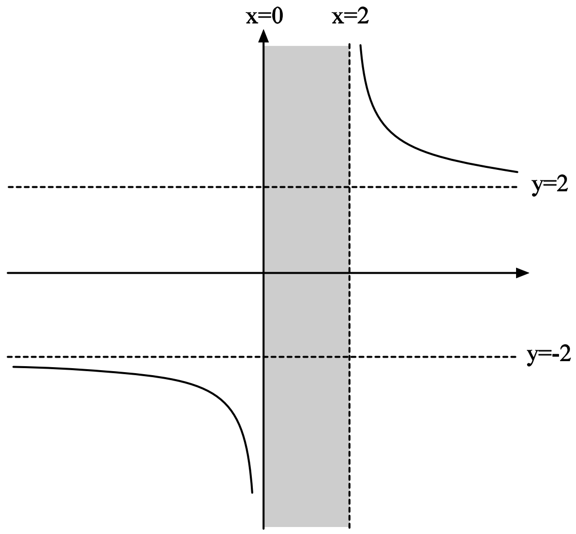
$$=\frac{4x^2-8x-4x^2+4x+4x-4}{2\sqrt{x^2-2x}\left(x^2-2x\right)}$$

$$f'(x)=\frac{-4}{2\sqrt{x^2-2x}\left(x^2-2x\right)}<0$$ לכל x

המכנה ב-$f'(x)$ תמיד חיובי, לכן סימן הנגזרת תלוי במונה.

$-4<0$ לכל x, לכן הפונקציה יורדת לכל $x>2$ או $x<0$.

ג.



אסמימפטוטות אופקיות: $y=\pm 2$

אסימפטוטה אנכית: $x=0,2$

הפונקציה יורדת לכל $x>2$ או $x<0$.

ד. $$\int_4^8\left(\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}-2\right)dx=2\overset{*}{\sqrt{x^2-2x}}-2x\ \Big|_4^8=$$

$$=2\sqrt{48}-16-\left(2\sqrt{8}-8\right)=0.199$$

* אינטגרל באמצעות זיהוי נגזרת פנימית ונגזרת חיצונית או אינטגרל בהצבה:

$$u=x^2-2x$$

$$\frac{du}{dx}=2x-2$$

$$dx=\frac{du}{2x-2}\qquad\qquad \int\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{u}}du=2\sqrt{u}+c$$

תשובה: השטח = 0.199.

פתרון שאלה 8

א.I נתון: x_0 נקודת מקסימום מקומי של $f(x)$.

כלומר נתון:

1. $f'(x_0)=0$
2. $f''(x_0)<0$

נתון: $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

נראה כי x_0 היא נקודת מינימום מקומי של $g(x)$.

$$g'(x)=\frac{-f'(x)}{\left[f(x)\right]^2} \quad \rightarrow g'(x_0)=\frac{-f(x_0)}{\left[f(x_0)\right]^2}=0$$

כלומר x_0 היא נקודה החשודה כקיצון.

$$g''(x)=-\underbrace{f''(x)}_{\text{שלילי}} \text{ סימן בלבד}$$

נתון: $f''(x_0)<0$

$$\Downarrow$$

$g''(x_0)>0$ (סימן בלבד)

כלומר x_0 נקודת מינימום מקומי.

א.II נתון: x_0 נקודת מינימום מקומי של $f(x)$.

כלומר נתון:

1. $f'(x_0)=0$
2. $f''(x_0)>0$

נראה כי x_0 היא מקסימום מקומי של $g(x)$.

הראנו קודם כי $g'(x_0)=0$

נותר להראות כי $g''(x_0)<0$

$$g''(x_0)=-\underbrace{f''(x_0)}_{\text{חיובי}}$$ סימן בלבד

$$\Downarrow$$

$$g''(x_0)<0$$ סימן בלבד

כלומר x_0 היא נקודת מקסימום מקומי של $g(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=x^4-2x^2+5$

נמצא נקודות קיצון: $f'(x)=4x^3-4x=0$

$$4x(x^2-1)=0$$

$$x=-1 \qquad x=1 \qquad x=0$$

הנקודות: $(-1,4)$ $(1,4)$ $(0,5)$

$$f''(x)=12x^2-4$$

$f''(0)=-4<0 \rightarrow (0,5)$ נקודת מקסימום

$f''(\pm1)=8>0 \rightarrow (1,4)$ נקודת מינימום

$(-1,4)$ נקודת מינימום

על פי סעיף א:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}$$

נקבל: $\left(0,\frac{1}{5}\right)$ נקודת מינימום

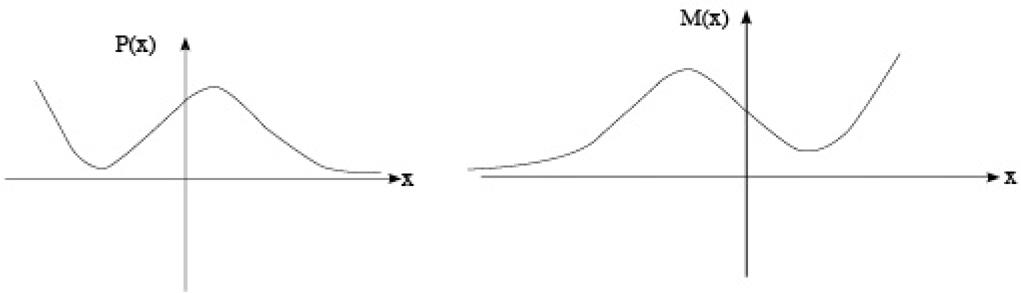
$\left(-1,\frac{1}{4}\right)$, $\left(1,\frac{1}{4}\right)$ נקודות מקסימום.

ג. על סמך סעיף א:

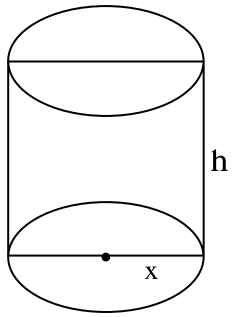
כמו כן נתון כי $P(x)>0$ לכל x.

$m(x)$	$P(x)$
$\min\left(3,\frac{1}{5}\right)$	$\max(3,5)$
$\max(-3,5)$	$\min\left(-3,\frac{1}{5}\right)$

גרף אפשרי:



פתרון שאלה 9



נסמן ב-x את רדיוס הבסיס.

נפח הגליל: $V = \pi R^2 \cdot h$

נתון: $V = 108\pi$

כלומר: $\pi \cdot x^2 \cdot h = 108\pi$

נחלץ את h : $h = \frac{108}{x^2}$

שטח פני הגליל $P(x) = 2\pi x^2 + 2\pi \cdot x \cdot \frac{108}{x^2}$

$P(x) = 2\pi x^2 + \frac{216\pi}{x}$

נגזור לקבלת מינימום: $P'(x) = 4\pi x - \frac{216\pi}{x^2} = 0$

$4\pi x^3 = 216\pi \quad / : \pi$

$4x^3 = 216 \quad / : 4$

$x^3 = 54 \quad / \sqrt[3]{\ }$

$\boxed{x = \sqrt[3]{54} = 3.77}$

$P''(x) = 4\pi + \frac{432\pi}{x^3}$

ולכן מינימלי. $P''(3.77) > 0$

תשובה: 3.77 ס"מ

פתרון מבחן מתכונת מס' 23

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן: x מהירות הנסיעה של רוכב האופניים.

y זמן הנסיעה עד הפגישה.

נרכז את נתוני השאלה בטבלה:

		מהירות	זמן	דרך
עד הפגישה	משאית	$3x$	y	$3xy$
	אופניים	x	y	xy

עד הפגישה נסעו רוכב האופניים ונהג המשאית את כל המרחק, כלומר:

$$3xy + xy = 240$$

$$4xy = 240 \quad /:4$$

$$\boxed{xy = 60}$$

$$\Downarrow$$

משאית – $3xy = 3 \cdot 60 = 180$

נשתמש בנתון זה לחישוב מרחק הנסיעה

אופניים – $xy = 60$

כלומר, עד הפגישה: נהג המשאית נסע 180 ק"מ.

רוכב האופניים נסע 60 ק"מ.

נשתמש בנתון זה לבניית טבלה המתארת את הדרך חזרה.

דרך	זמן	מהירות	
180	$\frac{180}{3x+20}$	$3x+20$	משאית
60	$\frac{60}{x-5}$	$x-5$	אופניים

המשוואה: האופניים היו $1\frac{3}{4}$ שעות יותר בדרך: $\frac{60}{x-5}=\frac{180}{3x+20}+1\frac{3}{4}$

מכנה משותף $4(x-5)(3x+20)$

$240(3x+20)=720(x-5)+7(x-5)(3x+20)$

$\cancel{720x}+4800=\cancel{720x}-3600+21x^2+140x-105x-700$

$21x^2+35x-9100=0 \quad /:7$

$3x^2+5x-1300=0$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm125}{6}=$

$x=20$

$x=\cancel{-21\frac{2}{3}}$

מהירות היא מספר חיובי.

תשובה: מהירות המשאית בהתחלה: 60 קמ"ש $=3\cdot20$

פתרון שאלה 2

1. א. נתון כי: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$ כלומר: $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$,

a_n הוא סדרה הנדסית. מנת הסדרה $q=\frac{1}{3}$.

על-פי הכלל: $a_{n+2}=\frac{1}{3}a_{n+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}a_n=\frac{1}{9}a_n$, נתון $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$

כלומר, $b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=a_n+\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{9}a_n=\frac{13}{9}a_n \Leftarrow \boxed{b_n=\frac{13}{9}a_n}$

$b_{n+1}=\frac{13}{9}a_{n+1}=\frac{13}{9}\cdot\frac{1}{3}a_n=\frac{13}{27}a_n \Leftarrow \boxed{b_{n+1}=\frac{13}{27}a_n}$

נוכיח כי b_n הוא סדרה הנדסית:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{13}{27}a_n}{\frac{13}{9}a_n}=\frac{1}{3}$$

מנת הסדרה b_n היא $\frac{1}{3}$.

נתון: $a_1=2$

$$b_1=\frac{13}{9}a_1=\frac{26}{9}$$

ב. נוסחה ל-b_n כפונקציה של n על-פי נוסחת האיבר בסדרה הנדסית

$$b_n=\frac{26}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

נוסחה:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$

ג. $a_n=\frac{2}{729}$, כלומר $\frac{2}{729}=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} /:2$

$$\frac{1}{729}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \boxed{n=7}$$

נוסחה:

$$S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

נחשב על-פי נוסחת הסכום:

$$S_7=\frac{\frac{26}{9}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^7-1\right]}{\frac{1}{3}-1}=4.33$$

הערה: מאחר שמנת הסדרה b_n היא $\frac{1}{3}$ ניתן לחשב בקירוב את סכום האיברים ללא תלות במספר האיברים על-פי נוסחת הסכום לסדרה הנדסית אינסופית יורדת, כלומר:

נוסחה:

$$S=\frac{a_1}{1-q}$$

$$S=\frac{\frac{26}{9}}{1-\frac{1}{3}}=4.33$$

2. נתונה הסדרה -54, -50, -46, ..., 242

נוסחה:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

א. $a_1 = -54$, $a_n = 242$, $d = 4$

$242 = -54 + (n-1)4$

$242 = -54 + 4n - 4$

$4n = 300$

$n = 75$

תשובה: בסדרה יש 75 איברים.

ב. נמצא ערך של n שבו מתקיים $a_n < 0$

$-54 + (n-1)4 < 0$

$-54 + 4n - 4 < 0$

$4n < 58$

$n < 14.5$

$\Downarrow$

$\boxed{n = 14}$

בסדרה 14 איברים שליליים $a_{14} = -54 + 13 \cdot 4 = -2$

ג. בסדרה 75 איברים, מהם 14 שליליים,

כלומר $75 - 14 = 61$ איברים חיוביים.

האיבר החיובי הראשון הוא $a_{15} = 2$

$$S_{61} = \frac{61}{2}[2 \cdot 2 + (61-1)4] = 7442$$

ד. צריך להתקיים:

$$S_n > 120$$

$$\frac{n}{2}[2(-54)+(n-1)4] > 120$$

$$\frac{n}{2}(-108+4n-4) > 120$$

$$\frac{n}{2}(-112+4n) > 120$$

$$-56n+2n^2 > 120$$

$$2n^2-56n-120 > 0 / :2$$

$$n^2-28n-60 > 0$$

$$(n-30)(n+2) > 0$$

$n > 30$ או $\cancel{n < -2}$ n מספר טבעי

$$\Downarrow$$

$$\boxed{n = 31}$$

$$S_{31} = \frac{31}{2}[2(-54)+30\cdot4] = 186 > 120$$

נראה שעבור $n = 30$ מתקבל סכום שאינו גדול מ-120.

$$S_{30} = \frac{30}{2}[2(-54)+29\cdot4] = 120$$

תשובה: $n = 31$, $S_{31} = 186$

פתרון שאלה 3

נסמן מאורעות:

A - עבר בהצלחה מבחן ראשון.

B - עבר בהצלחה מבחן שני.

נתון: $N(S) = 200$

$N(A)=80 \qquad N(B)=50$

$P(A\cup B)=\frac{17}{40}$

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{17}{40}$

$\frac{80}{200}+\frac{50}{200}-P(A\cap B)=\frac{17}{40}$

$P(A\cap B)=\frac{9}{40}$

או

$1-P(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{17}{40}$

$\Downarrow$

$P(\bar{A}\cap\bar{B})=\frac{23}{40}$

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	$\frac{9}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$
$\bar{B}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{23}{40}$	$\frac{150}{200}=\frac{3}{4}$
סה"כ	$\frac{80}{200}=\frac{2}{5}$	$\frac{120}{200}=\frac{3}{5}$	1

א. $P(A\cap B)=\frac{9}{40}$

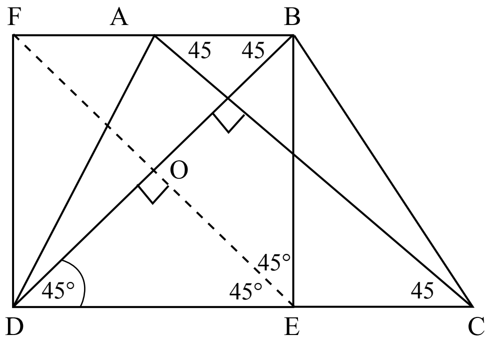
ב. $N(A\cap B)=\frac{9}{40}\cdot 200$

$N(A\cap B)=45$

ג. $P(B/A)=\frac{\frac{9}{40}}{\frac{2}{5}}=\frac{9}{16}$

ד. $P(\bar{A}/B)=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}$

פתרון שאלה 4



צ"ל: BEDF ריבוע

הוכחה:

$AB \parallel DC$ נתון

$AD = BC$ נתון

$\Downarrow$

$AC = BD$ בטרפז שווה-שוקיים האלכסונים שווים.

($\Delta ADC \cong \Delta BCD$ צ.ז.צ)

$AC \perp BD$ נתון שהאלכסונים מאונכים

$\Downarrow$

$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC = 45°$ מתקבל משולש ישר־זווית ושווה־שוקיים

$\begin{cases} OE \perp DB \\ DO = OB \end{cases}$ נתון אנך אמצעי

$\Downarrow$

ΔBDE במשולש שווה־שוקיים הגובה מתלכד עם התיכון.

$\Downarrow$

$DE = BE$

$\sphericalangle OEB = \sphericalangle OED = 45°$ חוצה-זווית הראש במשולש שווה־שוקיים

$\Downarrow$

$DO = BO = OE$ תיכון ליתר שווה למחצית היתר

$FE \parallel AC$ זוויות מתאימות

$AF \parallel EC$ המשכי מקבילים

$\Downarrow$

AFEC מקבילית, מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות

$\Downarrow$

$FE = AC$ צלעות נגדיות במקבילית

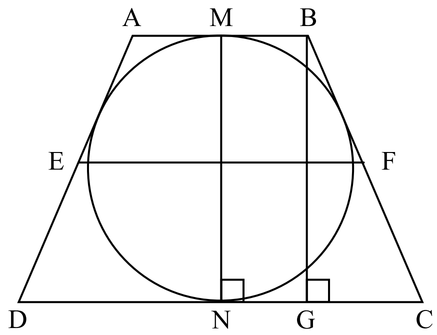
$\Downarrow$

$BD = FE$ כלל מעבר

$\Downarrow$

BEDF בריבוע, האלכסונים מאונכים זה לזה, חוצים זה את זה ושווים זה לזה.

פתרון שאלה 5



א. נתון: $AD = BC$

$AB \parallel DC$

בנית עזר: EF קטע אמצעים

צ"ל: $EF = AD$

הוכחה: $EF = \frac{AB+DC}{2}$ קטע אמצעים בטרפז שווה למחצית סכום הבסיסים.

$AB + DC = AD + BC$ במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.

$AD = BC$ נתון

$AB + DC = 2AD$

$EF = \frac{2AD}{2}$ הצבה

$EF = AD$ מ.ש.ל.

ב. על פי תוצאות סעיף א' נקבל

$AD = BC = EF =$ 10 ס"מ

$AB \parallel DC$ נתון

$\sphericalangle ABC = 150°$ נתון

$\Downarrow$

$\sphericalangle C = \sphericalangle D = 30°$ זוויות חד צדדיות בין מקבילים + זווית ליד הבסיס שוות.

MN - קוטר המעגל הוא המרחק בין הבסיסים על פי המשפט רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

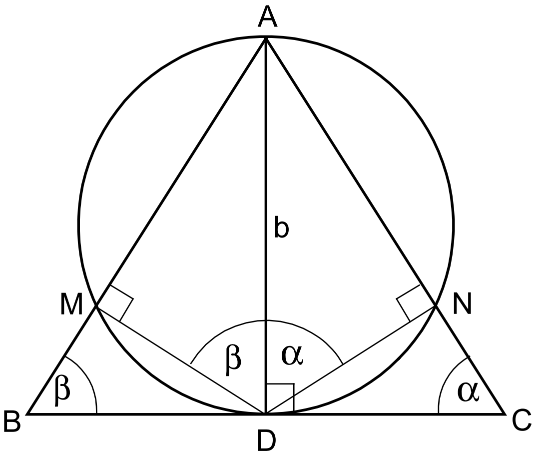
$BG = MN$ קוטר המעגל שווה לגובה הטרפז.

ב- ΔBGC

$BG = \frac{1}{2} \cdot 10 =$ 5 ס"מ ניצב מול זווית בת 30° שווה למחצית היתר.

תשובה: $R =$ 2.5 ס"מ

פתרון שאלה 6



נתבונן ב- ΔADC :

$$\cot\alpha = \frac{DC}{b}$$

$$\underline{DC = b\cot\alpha}$$

נתבונן ב- ΔADB :

$$\cot\beta = \frac{BD}{b}$$

$$\underline{BD = b\cot\beta}$$

או

א. $$S_{\Delta ABC} = \frac{AD\cdot BC}{2} = \frac{b\left(b\cot\alpha + b\cot\beta\right)}{2} = \frac{b^2\left(\cot\alpha + \cot\beta\right)}{2} \overset{\uparrow}{=} \frac{b^2\sin\left(\alpha+\beta\right)}{2\sin\alpha\sin\beta}$$

ב. $$\sphericalangle AND = \sphericalangle AMD = 90^\circ$$

משפט

1. זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה ל- 90°
2. סכום הזוויות הנגדיות במרובע חסום במעגל הוא 180°

נתון: $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, ולכן $\sphericalangle NDC = 90^\circ - \alpha$ ובאותו האופן $\sphericalangle MDB = 90^\circ - \beta$, מכאן:

$\Leftarrow$ $\sphericalangle ADN = \alpha$ ו- $\sphericalangle ADM = \beta$

אפשרות נוספת:

נתבונן ב- ΔABC : $\sphericalangle BAC = 180 - (\alpha+\beta)$ $\Leftarrow$ לפי משפט 2, $\sphericalangle MDN = \alpha + \beta$

נתבונן ב- ΔAND :

$$DN = b\cos\alpha \Leftarrow \cos\alpha = \frac{DN}{b}$$

נתבונן ב- ΔADM :

$$MD = b\cos\beta \Leftarrow \cos\beta = \frac{MD}{b}$$

$$S_{\Delta MND}=\frac{DN\cdot MD\cdot\sin\sphericalangle MDN}{2}=\frac{b\cos\alpha\cdot b\cos\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2}$$

נצמצם בהתאם

$$\text{יחס השטחים}=\frac{\Delta MND}{\Delta ABC}=\frac{\frac{1}{2}\left(b^2\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)\right)\uparrow}{\frac{1}{2}\left(b^2\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\right)}=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sin2\alpha\sin2\beta}{4}$$

$\downarrow$

על-פי נוסחה לזווית כפולה

פתרון שאלה 7

א. נתונה הפונקציה $\mathrm{f}(x)=\left(2x-x^m\right)^m$.

נתון $\mathrm{f}'(1)=-15$

$$\mathrm{f}'(x)=m\left(2x-x^m\right)^{m-1}\cdot\left(2-mx^{m-1}\right)$$

$$\mathrm{f}'(1)=m\left(2-1^m\right)^{m-1}\cdot\left(2-m\cdot 1^{m-1}\right)=-15$$

שים לב: $1^{m-1}=1^m=1$

$$m(2-m)=-15$$

$$m^2-2m-15=0$$

$$(m-5)(m+3)=0$$

תשובה: $m=-3$ $\quad m=5$

ב. הפונקציה: $\mathrm{f}(x)=\left(2x-x^{-3}\right)^{-3}$

$$\mathrm{f}(x)=\left(2x-\frac{1}{x^3}\right)^{-3}=\left(\frac{2x^4-1}{x^3}\right)^{-3}$$

$$f(x)=\left(\frac{x^3}{2x^4-1}\right)^3$$

תחום ההגדרה: $2x^4\neq 1$

$$x^4\neq\frac{1}{2}$$

$$x\neq\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

תחומי עלייה ותחומי ירידה:

$$f'(x)=-3\left(2x-x^{-3}\right)^{-4}\left(2+3x^{-4}\right)$$

$$f'(x)=\frac{-3\left(2+\frac{3}{x^4}\right)}{\left(2x-x^{-3}\right)^4}$$

$\begin{cases}2+\frac{3}{x^4}>0\\ \left(2x-x^{-3}\right)^4>0\end{cases}$ הביטויים הללו חיוביים לכל $x\neq 0$, $x\neq\pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$

לכן נקבל כי $f'(x)<0$ היא ביטוי שלילי לכל x בתחום ההגדרה.

תחומי ירידה:

$$x>\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \text{ או } -\sqrt[4]{\frac{1}{2}}<x<\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \text{ או } x<-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

ג. $f(x)=\left(2x-x^5\right)^5$ $\qquad m=5$

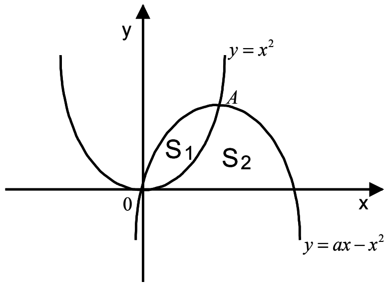
על פי הנתון: $g(x)=f'(x)$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^1 g(x)dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)=$$

$$=(2-1)^5-(0)=1$$

פתרון שאלה 8



א. נמצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות:

$$x^2 = ax - x^2$$
$$2x^2 - ax = 0$$
$$x(2x-a) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{a}{2}$$

תשובה: $A\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right) \qquad 0(0,0)$

ב. S_1 הוא השטח הכלוא בין הגרפים בין הנקודה 0 לנקודה $\frac{a}{2}$:

$$S_1 = \int_0^{\frac{a}{2}} \left(ax - x^2 - x^2\right)dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \left(ax - 2x^2\right)dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= \frac{a\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} - \frac{2\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} - (0) = \frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{12} = \frac{a^3}{24}$$

כדי לחשב את S_2, נחשב את סכום השטחים $S_1 + S_2$, שהוא למעשה השטח בין גרף הפונקציה $y = ax - x^2$ ובין ציר ה-x בין הנקודות $(0,0)$ $(a,0)$:

$$\Downarrow$$

$$ax - x^2 = 0$$
$$x(a-x) = 0$$
$$x = 0 \qquad x = a$$

$$S_1 + S_2 = \int_0^a \left(ax - x^2\right)dx = \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

נחשב את S_2 על-ידי חיסור S_1 מהשטח הכולל $S_1 + S_2$ ונקבל:

$$S_2 = \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{24} = \frac{a^3}{8}$$

נחשב את יחס השטחים:
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{a^3}{24}}{\frac{a^3}{8}}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

ג. חשוב נפח גוף סיבוב:

$$V=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}(x^2)^2\,dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{a}(ax-x^2)dx=$$

$$=\pi\int_0^{\frac{a}{2}}(x^4)dx+\pi\int_{\frac{a}{2}}^{a}(a^2x^2-2ax^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}+\pi\left(\frac{a^2x^3}{3}-\frac{2ax^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{a}=$$

$$=\pi\left(\frac{a^5}{32\cdot 5}\right)+\pi\left[\frac{a^5}{3}-\frac{2a^5}{4}+\frac{a^5}{2}-\left(\frac{a^5}{8\cdot 3}-\frac{2a^5}{16\cdot 4}+\frac{a^5}{32\cdot 5}\right)\right]=$$

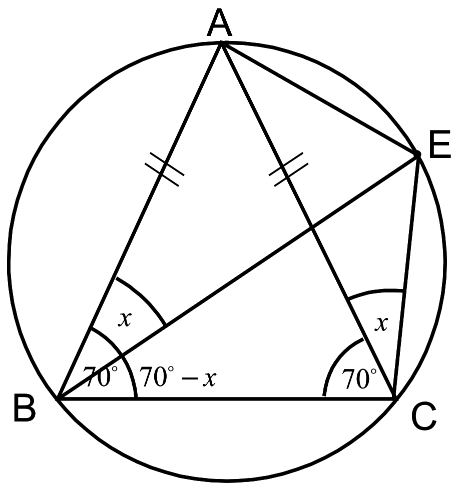
$$=\pi\cdot\frac{a^5}{160}+\pi\left(\frac{a^5}{3}-\frac{a^5}{24}+\frac{a^5}{32}-\frac{a^5}{160}\right)=\frac{31\pi a^5}{96}=1.01a^5$$

פתרון שאלה 9

נתון: $AB = AC$

נסמן: $\sphericalangle ABE = x$

$\sphericalangle ECA = x$ – זווית היקפית על אותה קשת



נתון כי: $\sphericalangle ABC = 70^\circ$

$\sphericalangle EBC = 70^\circ - x$

נתבונן ב- ΔABE :

על פי משפט הסינוסים: $\dfrac{AE}{\sin x} = 2R$

$AE = 2R\sin x$

נתבונן ב- ΔEBC :

$$\frac{EC}{\sin(70-x)} = 2R$$

$$EC = 2R\sin(70-x)$$

$$\frac{EB}{\sin(70+x)} = 2R$$

$$EB = 2R\sin(70+x)$$

הפונקציה שעבורה יש למצוא מקסימום:

$$\mathrm{f}(x) = EA + EB + EC$$

$$\mathrm{f}(x) = 2R\sin x + 2R\sin(70-x) + 2R\sin(70+x)$$

$$\mathrm{f}'(x) = 2R\left(\cos x - \cos(70-x) + \cos(70+x)\right)$$

נשתמש בנוסחה:

$$\boxed{\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$2R\left(\cos x - 2\sin 70\sin x\right) = 0$$

$$\cos x = 2\sin 70^\circ \sin x \quad /: \cos x \neq 0$$
$$1 = 2\sin 70 \cdot \tan x$$
$$\tan x = \frac{1}{2\sin 70^\circ}$$
$$\boxed{x = 28.016^\circ}$$

x		28.016	
$f'(x)$	+	מקסימום	−
$f(x)$	↗		↘

תשובה: עבור $\sphericalangle ABE = 28.016^\circ$ הסכום $EA+EB+EC$ הוא מקסימלי.

פתרון מבחן מתכונת מס' 24

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן: x – מספר הדקות הדרושות לצינור א כדי למלא לבדו את הבריכה.

$0.8x$ – מספר הדקות הדרושות לצינור ב כדי למלא לבדו את הבריכה.

$x+10$ – מספר הדקות הדרושות לצינור ג כדי למלא לבדו את הבריכה.

נרכז את הנתונים בטבלה:

	זמן יחד (בדקות)	הספק בדקה	סה"כ הספק	
צינור א	10	$\frac{1}{x}$	$\frac{10}{x}$	
צינור ב	10	$\frac{1}{0.8x}$	$\frac{10}{0.8x}$	1
צינור ג	10	$\frac{1}{x+10}$	$\frac{10}{x+10}$	

המשוואה:

מכנה משותף $$\frac{10}{x}+\frac{10}{0.8x}+\frac{10}{x+10}=1 \quad / \quad 0.8x(x+10)$$

$$8(x+10)+10(x+10)+8x=0.8x(x+10)$$

$$26x+180=0.8x^2+8x$$

$$0.8x^2-18x-180=0$$

$$x_{1,2}=\frac{18\pm30}{1.6} \rightarrow$$ מספר חיובי x

ולכן $x=30$

תשובה: הדקות הדרושות לכל צינור כדי למלא לבדו את הבריכה:

צינור א: 30 דקות.

צינור ב: 24 דקות.

צינור ג: 40 דקות.

פתרון שאלה 2

1. א. נתון:

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$b_2 = a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$b_n = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_n q + a_n q^2$$
$$\Downarrow$$
$$b_n = a_n\left(1 + q + q^2\right)$$
$$b_{n+1} = a_{n+1}\left(1 + q + q^2\right)$$

נוכיח כי הסדרה החדשה היא סדרה הנדסית: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (b_1 \neq 0)$

נתון כי סדרת ה-a_n היא סדרה הנדסית. קיבלנו כי מנת הסדרה החדשה היא q.

ב. נתון: $q = 3\ ,\ b_1 = 26$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 26$$
$$a_1 + 3a_1 + 9a_1 = 26$$
$$13a_1 = 26$$
$$a_1 = 2$$
$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 = 2 \cdot 3^9 = 39{,}366$$

ג. נתון: $\frac{b_{2n}}{a_n} = 351$

$$\frac{26 \cdot 3^{2n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} = 351$$
$$13 \cdot 3^n = 351 /:13$$
$$3^n = 27$$
$$3^n = 3^3$$
$$n = 3$$

נוסחה:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

2. נתונה סדרה חשבונית שבה כל איבר הוא יחידת זמן הנמשכת 5 דקות.
כלומר הריצה נמשכה $5n$ דקות.
נתון: האיבר הראשון הוא המרחק שעבר הרץ ב-5 הדקות הראשונות:

$a_1 = 1000$

ב-5 הדקות האחרונות

$a_n = 505$

נתון שהרץ עבר 9,030 מ'

כלומר: $S_n = 9{,}030$

נציב בנוסחת הסכום ונקבל: $\frac{n}{2}[1{,}000 + 505] = 9{,}030$

$\frac{n}{2}(1{,}505) = 9{,}030$

$n = 12$

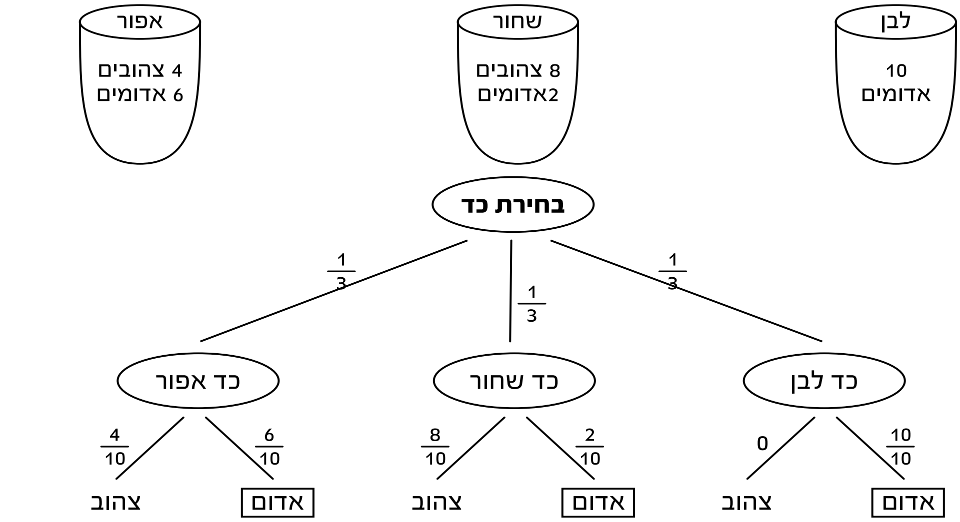
יחידת זמן היא 5n לכן: $\boxed{5n = 60}$

תשובה: הריצה נמשכה במשך $12 \cdot 5$ דקות,
כלומר 60 דקות = 1 שעה.

נוסחה:

$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$

פתרון שאלה 3



א.

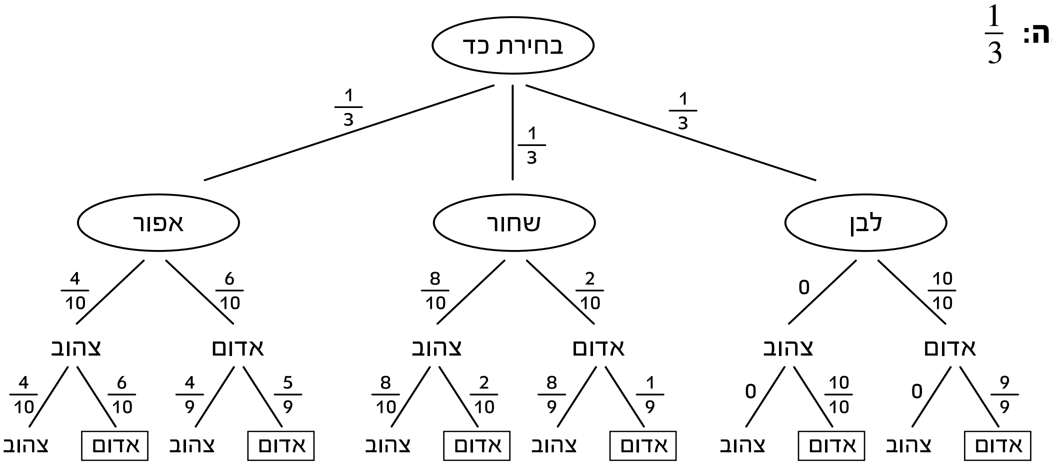
נחשב את ההסתברות להוצאת כדור אדום.

$$P(\text{אדום})=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{נבחר}\\ \text{הכד}\\ \text{האפור}\end{matrix}\Big/\begin{matrix}\text{הוצא}\\ \text{כדור}\\ \text{אדום}\end{matrix}\right)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{3}{5}}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}$$

תשובה: $\frac{1}{3}$

ב.

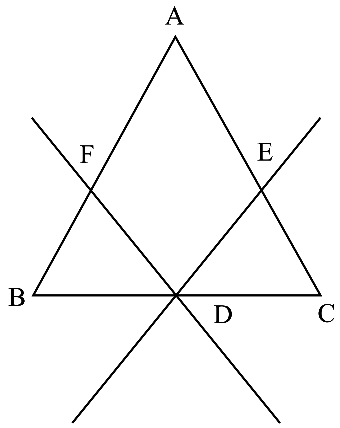


נחבר את כל ענפי העץ המסתיימים בצבע אדום:

$$P(\text{אדום})=\frac{1}{3}\left[1\cdot 1+0\cdot 1+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}\right]$$

$$P(\text{אדום})=\frac{79}{135}$$

תשובה: $\frac{79}{135}$



פתרון שאלה 4

$AB = AC = a$ נתון + הצבה

$\sphericalangle B = \sphericalangle C = \alpha$ זווית בסיס במשולש שווה-שוקיים + הצבה

$\Downarrow$

$\sphericalangle A = 180 - 2\alpha$ סכום זווית במשולש ABC

$DE \parallel AB$ נתון

$DF \parallel AC$ נתון

$\Downarrow$

מקבילית AEDF מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.

$\Downarrow$

$\sphericalangle CED = \sphericalangle BFD = 180 - 2\alpha$ זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים

$\Downarrow$

$\sphericalangle EDC = \sphericalangle FDB = \alpha$ חישוב זוויות ב-EDC , FDB בהתאמה.

$\Downarrow$

$ED = EC = b$ מול זוויות שוות צלעות שוות + הצבה.

$AE = AC - EC = a - b$ חיסור צלעות.

$AE = FD = a - b$ צלעות נגדיות במקבילית שוות + העברה.

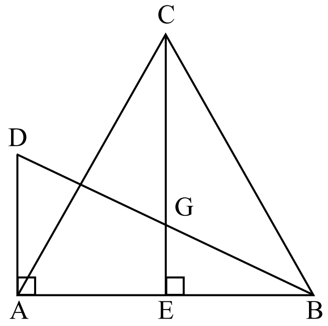
$\Downarrow$

$FD + DE = a - b + b = a$

$\Downarrow$

$FD + DE = AB = a$ מ.ש.ל.

פתרון שאלה 5



$CE \perp AB$ נתון

$DA \perp AB$ נתון

$\Downarrow$

$\sphericalangle DAE = \sphericalangle CEB = 90°$

$DA \parallel CE$ זוויות מתאימות שוות.

ΔABC שווה צלעות - נתון.

$\Downarrow$

$AE = EB$ גובה במשולש שווה צלעות הוא גם תיכון

$\Downarrow$

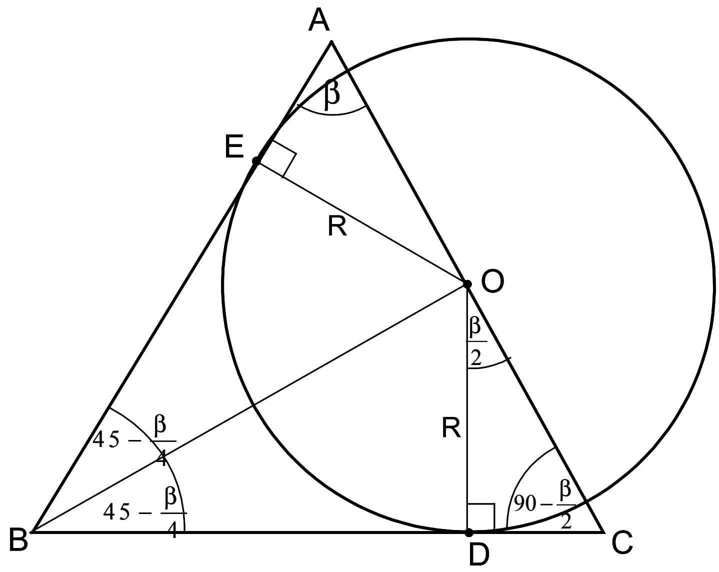
EG הוא קטע אמצעים ב- ΔADB

על פי **המשפט:** קטע היוצא מאמצע צלע אחת במשולש ומקביל לשלישית חוצה גם את הצלע השניה.

$\Downarrow$

$DG = GB$ מ.ש.ל.

פתרון שאלה 6



משפט

רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה

$\measuredangle OEA = 90^\circ$ $\qquad OE = R$

$\measuredangle ODC = 90^\circ$ $\qquad OD = R$

נתון: $\measuredangle BAC = \beta$

זוויות הבסיס: $\measuredangle B = \measuredangle C = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$

ולכן: $\measuredangle DOC = \dfrac{\beta}{2}$

משפט

הקטע המחבר נקודה שיוצאים ממנה שני המשיקים למעגל עם מרכז המעגל חוצה את הזווית בין המשיקים

כלומר: $\sphericalangle EBO = \sphericalangle OBD$ וכל אחת מהן שווה ל– $45^\circ - \frac{\beta}{4}$.

כמו כן: $BE = BD$, על-פי המשפט:

משפט

שני משיקים היוצאים מאותה נקודה למעגל שווים עד נקודת ההשקה

נתבונן ב- ΔODC: $\tan\frac{\beta}{2} = \frac{DC}{R} \Rightarrow DC = R\tan\frac{\beta}{2}$

נתבונן ב- ΔBOD: $\cot\left(45 - \frac{\beta}{4}\right) = \frac{BD}{R} \Rightarrow BD = R\cot\left(45^\circ - \frac{\beta}{4}\right)$

לכן:
$$\boxed{BC = DC + BD = R\tan\frac{\beta}{2} + R\cot\left(45^\circ - \frac{\beta}{4}\right)}$$

נתבונן ב- ΔAEO: $\cot\beta = \frac{AE}{R} \Rightarrow AE = R\cot\beta$

ולכן שוק המשולש: $AB = AE + EB$

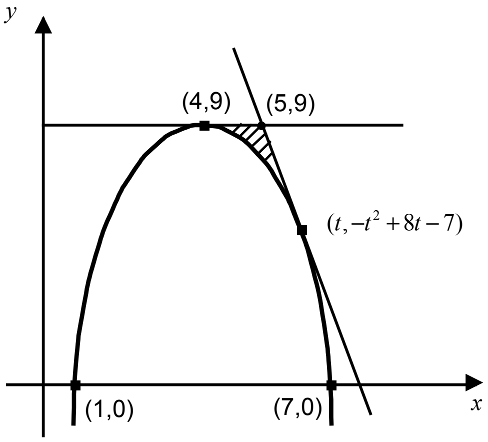
$$\boxed{AB = R\cot\beta + R\cot\left(45^\circ - \frac{\beta}{4}\right)}$$

תשובה אפשרית נוספת:

$$AB = AO + OC = \frac{R}{\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{R}{\sin\beta}$$

פתרון שאלה 7

א. $y=-x^2+8x-7$



נשרטט את גרף הפונקציה:

הפונקציה חותכת את ציר ה- x

$$x^2-8x+7=0$$

$$(x-1)(x-7)=0$$

נקודת הקיצון: $y'=-2x+8=0$

$$x=4;\quad y=-4^2+8\cdot4-7=9$$

$$\boxed{max(4,9)}$$

נסמן נקודת השקה ב: $(t,-t^2+8t-7)$

נמצא את שיפוע המשיק על-פי הנגזרת בנקודה זו ועל-פי הנוסחה $m=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ ונשווה ביניהם:

שיפוע על-פי הנגזרת	שיפוע על-פי הנוסחה
$m=\dfrac{9-(-t^2+8t-7)}{5-t}=\dfrac{t^2-8t+16}{5-t}$	$y'_{(x=t)}=-2t+8$

נשווה שיפועים לקבלת t:

$$-2t+8=\frac{t^2-8t+16}{5-t}\Rightarrow(-2t+8)(5-t)=t^2-8t+16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-10t+2t^2+40-8t=t^2-8t+16\Rightarrow t^2-10t+24=0$$

$$(t-6)(t-4)=0$$

נקודות ההשקה:

$t=4$	$t=6$
$y=-4^2+8\cdot4-7$	$y=-6^2+8\cdot6-7$
$y=9$	$y=5$
$(4,9)$	$(6,5)$

שיפועי המשיקים:

$$y'_{(t=6)}=-2\cdot6+8=-4$$

$$y'_{(t=4)}=-2\cdot4+8=0$$

משוואות המשיקים:

משיק 1 מקביל לציר ה- x ומשוואתו: $y=9$

משיק 2 $y-5=-4\left(x-6\right)$ $\boxed{y=-4x+29}$

ב. נחלק את חישוב השטח לשניים: S_1 – בין משיק 1 לגרף הפונקציה בין הנקודות 4 ו-5.

S_2 – בין משיק 2 לגרף הפונקציה בין הנקודות 5 ו-6.

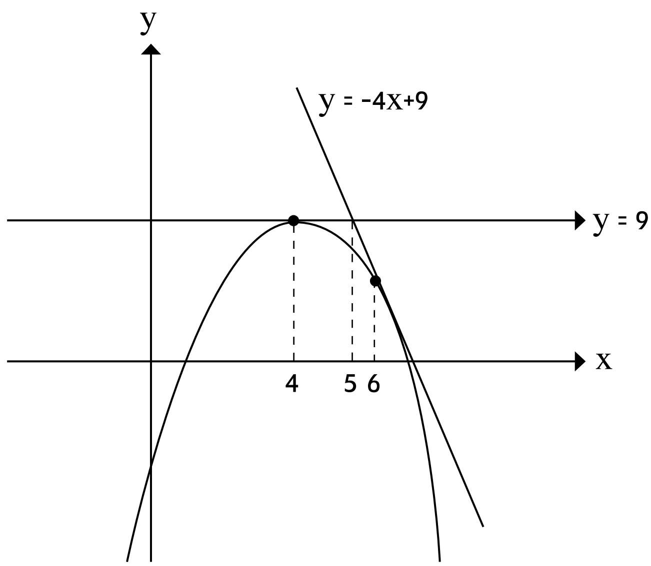
$$S_1=\int_4^5\left[9-\left(-x^2+8x-7\right)\right]dx=\int_4^5\left(x^2-8x+16\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+16x\Big|_4^5=$$

$$=\frac{5^3}{3}-\frac{8\cdot 5^2}{2}+16\cdot 5-\left(\frac{4^3}{3}-\frac{8\cdot 4^2}{2}+16\cdot 4\right)=\frac{1}{3}$$

$$S_2=\int_5^6\left[-4x+29-\left(-x^2+8x-7\right)\right]dx=\int_5^6\left(x^2-12x+36\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{12x^2}{2}+36x\Big|_5^6=\frac{6^3}{3}-\frac{12\cdot 6^2}{2}+36\cdot 6-\left(\frac{5^3}{3}-\frac{12\cdot 5^2}{2}+36\cdot 5\right)=\frac{1}{3}$$

$$S_1+S_2=\frac{2}{3}$$



פתרון שאלה 8

א. נקודות חיתוך עם ציר x , $y=0$:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2} \qquad g(x)=\frac{2x-1}{x^2} \qquad h(x)=\frac{1-2x}{x^2}$$

$$0=x+2 \qquad 0=2x-1 \qquad 0=1-2x$$

$$x=-2 \qquad x=\frac{1}{2} \qquad x=\frac{1}{2}$$

$$A(-2,0) \qquad A\left(\frac{1}{2},0\right) \qquad A\left(\frac{1}{2},0\right)$$

ב. התנהגות בסביבת הנקודה $x=0$. סימון: $x\to 0^+$ שואפת מימין ל- $x=0$.

$x\to 0^-$ שואפת משמאל ל- $x=0$.

$$h(x)=\frac{1-2x}{x^2} \qquad g(x)=\frac{2x-1}{x^2} \qquad f(x)=\frac{x+2}{x^2}$$

$$\begin{cases} x\to 0^+ \\ y\to +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to 0^+ \\ y\to -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to 0^+ \\ y\to +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\to 0^- \\ y\to +\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to 0^- \\ y\to -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to 0^- \\ x\to +\infty \end{cases}$$

תשובה: לפונקציה $f(x)$ מתאים גרף (3)

לפונקציה $g(x)$ מתאים גרף (1)

לפונקציה $h(x)$ מתאים גרף (2)

ג. פונקציה (א):

$$y=\frac{x+2}{x^2}$$

$$y'=\frac{x^2-2x(x+2)}{\left(x^2\right)^2}=\frac{-x^2-4x}{x^4}$$

$$-x^2-4x=0$$

$$-x(x+4)=0$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$x=-4$ $\qquad$ $x\neq 0$ תחום ההגדרה.

$$y=\frac{-4+2}{16}=-\frac{1}{8}$$

נקודת מינימום: $B\left(-4,-\frac{1}{8}\right)$

$$y''=\frac{(-2x-4)\left(x^4\right)-4x^3\left(-x^2-4x\right)}{x^8}$$

$$y''=\frac{-2x^5-4x^4+4x^5+16x^4}{x^8}=\frac{2x^5+12x^4}{x^8}=\frac{2x^4(x+6)}{x^8}=\frac{2(x+6)}{x^4}$$

$$x+6=0$$

$$x=-6 \qquad y=\frac{-6+2}{(-6)^2}=-\frac{1}{9}$$

נקודת פיתול: $C\left(-6,-\frac{1}{9}\right)$

ד.

x		-6		0	
y''	$-$		$+$		$+$
y	קעורה כלפי מטה $\cap$		קעורה כלפי מעלה $\cup$		קעורה כלפי מעלה $\cup$

קעורה כלפי מעלה: $x>0$ או $-6<x<0$

קעורה כלפי מטה: $x<-6$

ה. על פי תוצאות סעיפים קודמים ניתן לראות

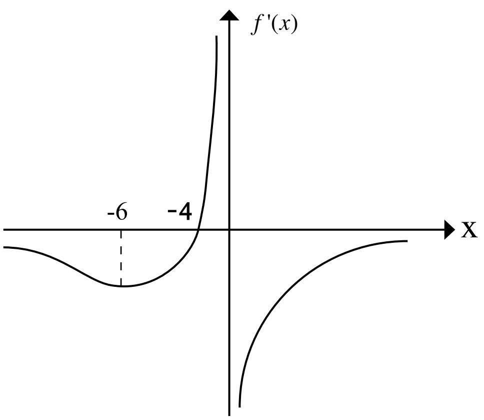
$f'(-4)=0$ לכן זוהי נקודת חיתוך עם ציר ה-x

$f''(-6)=0$ לכן זוהי נקודת קיצון ונגזרתה משנה סימן

על פי הטבלה בסעיף קודם.

לגרף הנגזרת אסימפטוטות: $x=0,\ \ y=0$

גרף הנגזרת: $y'=\frac{-x^2-4x}{x^4}$



ו. $\left|\int_{-6}^{-4} f'(x)dx\right| = \left|f(x)\right|\Big|_{-6}^{-4} = \left|f(-4)-f(-6)\right| =$

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2}$$

$$f(-4)=-\frac{1}{8} \qquad = \left|-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right| = \frac{1}{72}$$

$$f(-6)=-\frac{1}{9}$$

תשובה: $\frac{1}{72}$

ז. $M(x)=f(x)+3$

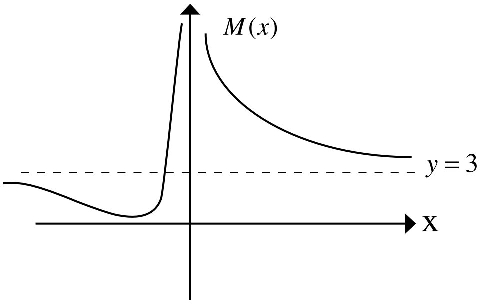
$$M(x)=\frac{x+2}{x^2}+3$$

אסימפטוטות: $x=0$, $y=3$

הפונקציה $M(x)$ היא הזזה של $f(x)$ על ציר ה- y 3 יחידות למעלה. כלומר שיעור ה- x של נקודת הקיצון ושל נקודת הפיתול נשאר כשהיה אולם שעור ה- y גדל ב-3 יחידות. כלומר:

$\min\left(-4,-\frac{1}{8}+3\right)$

פיתול $\left(-6,-\frac{1}{9}+3\right)$



פתרון שאלה 9

א. נתונה הפונקציה: $y = ax^3 + 8$

נתון כי: $y'_{(x=-2)} = -12$

נחשב את a:

$$y' = 3ax^2 \qquad \Rightarrow 3a(-2)^2 = -12 \qquad 12a = -12 \Rightarrow$$

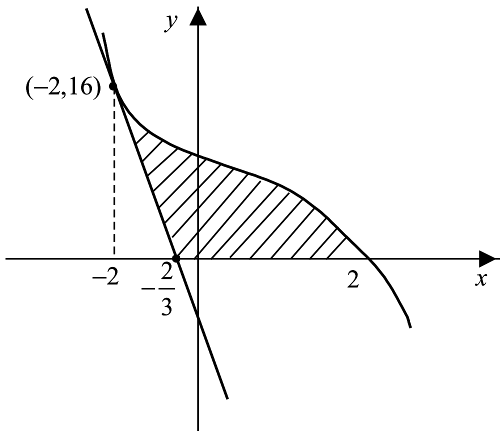
$$\boxed{a = -1}$$

ב. משוואת המשיק:

$$y = -(-2)^3 + 8 = 16 \qquad x = -2$$

$$y = -12x - 8 \qquad \Rightarrow \qquad y - 16 = -12(x+2)$$

ג. נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x :



$$12x = -8$$

$$x = \frac{-8}{12} = \frac{-2}{3}$$

שטח המשולש שהמשיק יוצר עם ציר ה- x :

$$S_\Delta = \frac{1\frac{1}{3} \cdot 16}{2} = \frac{32}{3}$$

נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x :

$$-x^3 + 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

נחשב את השטח בין גרף הפונקציה לנקודות 2- , 2 :

$$\int_{-2}^{2} (-x^3 + 8)dx =$$

$$\frac{-x^4}{4}+8x\ \Big|_{-2}^{2}=\frac{-2^4}{4}+8\cdot 2-\left(\frac{-(-2)^4}{4}+8(-2)\right)=$$

$$=-4+16-(-4-16)=32$$

נחסר משטח זה את שטח המשולש שקיבלנו קודם לקבלת השטח המבוקש.

$$S_{\text{מבוקש}}=32-\frac{32}{3}=21\frac{1}{3}$$

ד. חישוב הנפח:

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(-x^3+8)^2\,dx-\pi\int_{-2}^{-\frac{2}{3}}(-12x-8)^2\,dx=$$

$$\pi\int_{-2}^{2}(x^6-16x^3+64)dx-\pi\int_{-2}^{-\frac{2}{3}}(144x^2+192x+64)dx=$$

$$\pi\left(\frac{x^7}{7}-4x^4+64x\right)\Bigg|_{-2}^{2}-\pi\left(48x^3+96x^2+64x\right)\Bigg|_{-2}^{-\frac{2}{3}}=$$

$$292\frac{4}{7}\pi-113\frac{7}{9}\pi=178\frac{50}{63}\pi$$

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן x – מספר התרגילים שפתר נועם בשעה.

נכניס את הנתונים לתוך טבלה.

		זמן עבודה	מספר תרגילים בשעה - קצב	סה"כ תרגילים
	נועם	$\frac{40}{x}$	x	40
נדב	שלב א	2	x	$2x$
נדב	שלב ב	1	–	–
נדב	שלב ג	$\frac{40-2x}{x+1}$	$x+1$	$40-2x$

נשווה בין זמן העבודה של נועם לזמן העבודה של נדב:

$$\frac{40}{x}=2+1+\frac{40-2x}{x+1}$$

$$\frac{40}{x}=3+\frac{40-2x}{x+1} \quad / \cdot x(x+1)$$

$$40(x+1)=3x(x+1)+x(40-2x)$$

$$40x+40=3x^2+3x+40x-2x^2$$

$$x^2+3x-40=0$$

$$(x-5)(x+8)=0$$

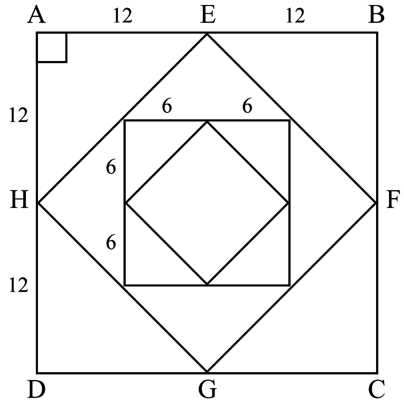
$$x=5 \qquad x=-8$$

לא ייתכן

תשובה: נועם פתר 5 תרגילים בשעה.

פתרון שאלה 2

1. א. נסרטט מספר ריבועים על-פי ההנחיה בשאלה:



צלעות הריבועים במקום אי-זוגי, כלומר ריבוע ראשון, שלישי, חמישי וכך הלאה, מהוות סדרה הנדסית אינסופית יורדת כאשר כל צלע ריבוע מהווה $\frac{1}{2}$ מצלע הריבוע הקודם, כלומר מתקבלת סדרת הצלעות במקום אי-זוגי: $24, 12, 6, 3, 1.5, ...$

צלעות הריבועים במקום זוגי, כלומר ריבוע שני, רביעי, שישי וכך הלאה, מהוות סדרה הנדסית אינסופית יורדת, אף היא בעלת מנה $\frac{1}{2}$ כאשר איברה הראשון הוא על-פי משפט פיתגורס

$$HE^2 = 12^2 + 12^2$$

$$HE = 12\sqrt{2}$$

לכן סדרת הצלעות במקום זוגי:

$$12\sqrt{2},\ 6\sqrt{2},\ 3\sqrt{2},\ 1.5\sqrt{2},\ .....$$

סדרת כל צלעות הריבועים אף היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת

$$24,\ 12\sqrt{2},\ 12,\ 6\sqrt{2},\ 6,\ 3\sqrt{2},\ 3,\ 1.5\sqrt{2},\ 1.5,\ ...$$

שמנתה: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

נוסחה:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

סדרת היקפי הריבועים אף היא סדרה הנדסית יורדת:

$$4\cdot 24,\ 4\cdot 12\sqrt{2},\ 4\cdot 12,\ 4\cdot 6\sqrt{2},...$$

נחשב על-פי נוסחת הסכום

את סכום היקפי הריבועים:

נוסחה:

$$S=\frac{a_1^{\ 2}}{1-q^2}$$

נכפול בצמוד

$$S=96\left(2+\sqrt{2}\right)=327.76 \text{ ס"מ}$$

ב. סכום סדרת שטחי הריבועים הוא סכום ריבועי האיברים, כלומר:

$$S=\frac{24^2}{1-\frac{1}{2}}=1152 \text{ סמ"ר}$$

2. נתון כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1=-4 \\ a_{n+1}=3n+1-a_n \end{cases}$$

א. נחשב את האיברים הראשונים בסדרה:

$$(n=1) \qquad a_2=3\cdot1+1-(-4)$$
$$a_2=8$$

$$(n=2) \qquad a_3=3\cdot2+1-8$$
$$a_3=-1$$

$$(n=3) \qquad a_4=3\cdot3+1-(-1)$$
$$a_4=11$$

$$(n=4) \qquad a_5=3\cdot4+1-11$$
$$a_5=2$$

$$(n=5) \qquad a_6=3\cdot5+1-2$$
$$a_6=14$$

הסדרה: $-4\ ,\ 8\ ,\ -1\ ,\ 11\ ,\ 2\ ,\ 14\ ,\ \ldots$

ב. נבטא את a_{n+2} באמצעות כלל הנסיגה:

$$a_{n+2}=3(n+1)+1-a_{n+1}$$

נחליף את הביטוי a_{n+1} על פי כלל הנסיגה:

$$a_{n+2} = 3n+3+1-(3n+1-a_n)$$
$$a_{n+2} = 3n+4-3n-1+a_n$$
$$a_{n+2} = 3+a_n$$

כלומר: $a_{n+2}-a_n = 3$ מ.ש.ל.

ג. על פי סעיף ב' הוכחנו כי סדרת האיברים העומדים במקום זוגי או אי זוגי הן סדרות חשבוניות בעלות הפרש 3.

יש לחשב את הסכום

$$S_{20} = 8+11+14+...$$

מקום זוגי $S_{20} = \frac{20}{2}[2\cdot 8+(20-1)3]$

$$S_{20} = 730$$

נוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

תשובה: 730

פתרון שאלה 3

$$S=\frac{4\cdot 24}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{192}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{192\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\quad\Rightarrow$$

נסמן מאורעות:

A - הצלחה במתכונת.

B - הצלחה בבגרות.

נתון: $N(S) = 500$

$$P(\bar{A})=0.2\quad ,\quad N(\bar{A}\cap B)=N(A\cap\bar{B})$$

$$P(B/A)=0.9$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=0.9$$

$$\frac{P(B\cap A)}{0.8}=0.9$$

$$P(B\cap A)=0.72$$

ידוע כי $P(\bar{A}\cap B)=P(A\cap\bar{B})$

$$\Downarrow$$

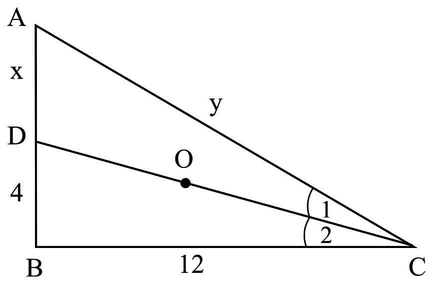
א. $N(\bar{A}\cap B)=0.08\cdot 500=40$

ב. $P(A/\bar{B})=\dfrac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{0.08}{0.2}=0.4$

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	0.72	0.08	0.8
$\bar{B}$	0.08	0.72	0.2
סה"כ	0.8	0.2	1

פתרון שאלה 4

מרכז המעגל החסום במשולש הוא נקודת מפגש חוצי זוויות המשולש



$\Downarrow$

$\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2$

.1 $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$ משפט חוצה-זווית

$\sphericalangle B = 90°$ נתון

.2 $AB^2 + BC^2 = AC^2$ משפט פיתגורס ב-ΔABC

$BD = 4$ ס"מ , $BC = 12$ ס"מ נתון

$AD = x$ הצבה

$AC = y$

נציב ב-(1) וב-(2) בהתאמה

$$\frac{y}{12} = \frac{x}{4} \Rightarrow y = 3x$$

$$(x+4)^2 + 12^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 8x + 16 + 144 = (3x)^2$$

$\Downarrow$

$$8x^2 - 8x - 160 = 0 \big/ :8$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

$$(x-5)(x+4) = 0$$

$\swarrow \qquad \searrow$

$x = 5 \qquad x = -4$
לא ייתכן

$y = 3 \cdot 5 = 15$

תשובה: $AD = 5$, $AC = 15$

ב. AO חוצה-זווית על-פי המשפט שצוין לעיל

$$\Downarrow$$

$$\frac{AD}{AC}=\frac{DO}{OC}$$ משפט חוצה-זווית

$$\frac{5}{15}=\frac{DO}{OC}$$

$$\frac{DO}{OC}=\frac{1}{3}$$ מ.ש.ל. ב.

ג. ב- ΔBDC משפט פיתגורס

$$DC^2=4^2+12^2$$

$$DC=\sqrt{160}=12.65$$

נסמן: $DO=t$

$$\Downarrow$$

$OC=3t$ על-פי סעיף ב'.

$$\Downarrow$$

$$t+3t=\sqrt{160}$$

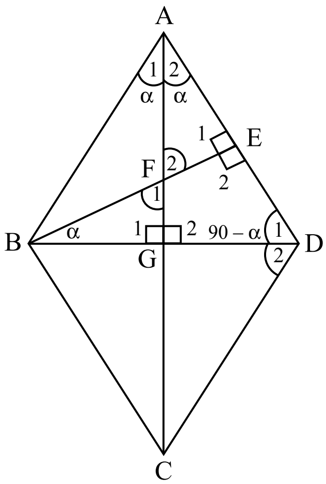
$$4t=\sqrt{160}$$

$$4t=4\sqrt{10}$$

$$t=\sqrt{10}=3.16$$

תשובה: $DO=\sqrt{10}$ ס"מ , $OC=3\sqrt{10}$ ס"מ

פתרון שאלה 5



א. ב- ΔBFG , ΔABG

$\sphericalangle G_1 = \sphericalangle G_1 = 90°$ ז. משותפת האלכסונים במעויין מאונכים זה לזה וחוצים זוויות.

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \alpha$ הצבה

$\sphericalangle AEB = 90°$ נתון

$\Downarrow$

$\sphericalangle F_2 = \sphericalangle F_1 = 90° - \alpha$ זוויות קודקודיות + סכום זווית ב-ΔAFE

$\sphericalangle ABG = 90° - \alpha$ סכום זווית ב-ΔABG

$\Downarrow$

$\Delta ABG \sim \Delta BFG$ (ז.ז) מ.ש.ל.

ב. ב- ΔBDE , ΔAFE

$\sphericalangle D_1 = 90° - \alpha$ חישוב זוויות ב-ΔAGD

$\sphericalangle EBD = \sphericalangle A_2 = \alpha$ מסעיף א + חישוב זוויות ב-ΔEBD

$\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2 = 90$ נתון

$\Downarrow$

$\Delta AFE \sim \Delta BDE$ (ז.ז) מ.ש.ל.

ג. נתון: AC = 8 ס"מ , BD = 6 ס"מ

AG = 4 ס"מ , BG = 3 ס"מ האלכסונים במעוין חוצים זה את זה.

צ"ל: AF

על פי משפט פיתגורס ב-ΔAGD

$$AD^2 = 4^2 + 3^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$AD = 5$$

$$\frac{BG}{FG} = \frac{AG}{BG}$$ יחס הדמיון סעיף א.

$$\frac{3}{FG} = \frac{4}{3}$$ הצבה

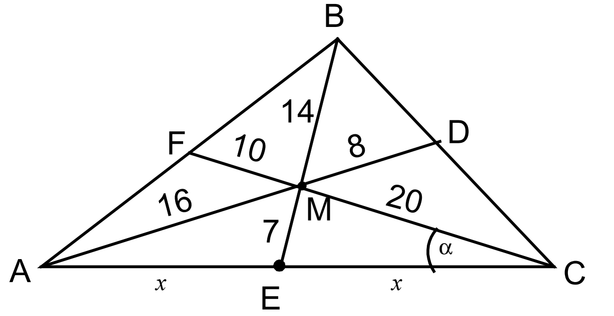
FG = 2.25 ס"מ

AF = 4 − 2.25 = 1.75 ס"מ

תשובה: AF = 1.75 ס"מ

פתרון שאלה 6

א.



משפט

תיכונים במשולש מחלקים זה את זה ביחס 2:1, החלק הגדול הוא החלק הקרוב לקודקוד

לפי המשפט:

$$BM = 14 \qquad ME = 7$$

$$CM = 20 \qquad MF = 10$$

$$AM = 16 \qquad MD = 8$$

נתבונן ב- ΔMEC וב- ΔMAC.

נשתמש במשפט הקוסינוסים בשני המשולשים עבור $\sphericalangle MCA = \alpha$ – זווית משותפת.

נוסחה:

משפט הקוסינוסים:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

נבודד $\cos\gamma$ ונקבל:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ΔMEC $\qquad\qquad$ ΔMAC

$$\cos\alpha = \frac{20^2 + (2x)^2 - 16^2}{2 \cdot 20 \cdot 2x} \qquad\qquad \cos\alpha = \frac{20^2 + x^2 - 7^2}{2 \cdot 20 \cdot x}$$

נשווה בין הביטויים ונקבל:

$$\frac{400 + 4x^2 - 256}{80x} = \frac{400 + x^2 - 49}{40x} \quad / \cdot 80x$$

$$144 + 4x^2 = 2\left(351 + x^2\right)$$

$$2x^2 = 558$$

$$x^2 = 279$$

$$x = 16.7$$

$$AC = 2x$$

תשובה: $AC = 33.4$ ס"מ

ב.

$$\cos\alpha = \frac{400 + 279 - 49}{2 \cdot 20 \cdot 16.7}$$

$$\alpha = 19.418^\circ$$

ΔEMC

$$\frac{16.7}{\sin\sphericalangle EMC} = \frac{7}{\sin 19.418}$$

$$\sphericalangle EMC = 52.48^\circ$$

$$\cos\sphericalangle AMC = \frac{16^2 + 20^2 - (2x)^2}{2 \cdot 16 \cdot 20}$$

$$\cos\sphericalangle AMC = \frac{16^2 + 20^2 - 4 \cdot 279}{640} = \frac{-460}{640}$$

$$\sphericalangle AMC = 135.95^\circ$$

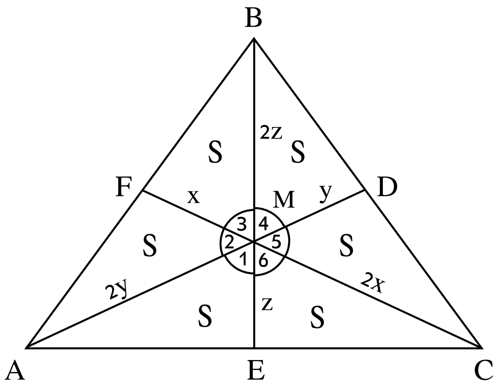
$$\sphericalangle BMD = 135.95^\circ - 52.48^\circ = 83.47^\circ$$

$$S_{AFMD} = S_{\Delta FMB} + S_{\Delta BMD} = \frac{10 \cdot 14 \cdot \sin 52.48}{2} + \frac{8 \cdot 14 \cdot \sin 83.47}{2}$$

$= 111.156$ סמ"ר

תשובה: 111.156 סמ"ר

ג. על פי זוויות קודקודיות



$$\sphericalangle M_1 = \sphericalangle M_4 = \alpha$$
$$\sphericalangle M_2 = \sphericalangle M_5 = \beta$$
$$\sphericalangle M_3 = \sphericalangle M_6 = \gamma$$

על פי מפגש תיכונים:

$$CM = 2MF = 2x$$
$$AM = 2MD = 2y$$
$$BM = 2ME = 2z$$

$$S_{\Delta BMF} = S_{\Delta CME} = \frac{2 \cdot z \cdot x \sin\gamma}{2}$$
$$S_{\Delta BMD} = S_{\Delta AME} = \frac{2 \cdot z \cdot y \sin\alpha}{2}$$
$$S_{\Delta DMC} = S_{\Delta FMA} = \frac{2 \cdot x \cdot y \sin\beta}{2}$$

תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח (לשני המשולשים צלע וגובה לצלע זהים)

מכאן נקבל $S_{\Delta BMF} = S_{\Delta FMA} = S_{\Delta CME}$

כלומר נקודת מפגש התיכונים מחלקת את המשולש ל-6 משולשים שווי שטח.

נסמן כל שטח משולש ב-S

לכן $\frac{S_{BFMD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{2S}{6S} = \frac{1}{3}$

ד. $S_{\Delta ABC} = 3 \cdot 111.156 \underset{\text{סמ"ר}}{=} 333.469$

פתרון שאלה 7

א. נתון: $f'(x)=10x\left(x^2-16\right)^4$

כדי למצוא את $f(x)$ נבצע אינטגרל ל-$f'(x)$, באמצעות זיהוי נגזרת פנימית ונגזרת חיצונית. כלומר
"ננחש" $\int 10x(x^2-16)^4dx=(x^2-16)^5+c$

ונבדוק ע"י גזירה שאכן מתקבל הביטוי בתוך האינטגרנט או באמצעות **שיטת ההצבה**.

נסמן: $u=x^2-16$

על-ידי גזירה של שני האגפים נקבל: $du=2xdx$

ולכן: $* \quad dx=\dfrac{du}{2x}$

נציב *: $\int 10x\left(x^2-16\right)^4dx=\int 10x(u)^4dx=\int 10x(u)^4\cdot\dfrac{du}{2x}$

$$=\int 5(u)^4du=\cancel{5}\,\frac{u^5}{\cancel{5}}+C=\left(x^2-16\right)^5+C$$

$$f(x)=\left(x^2-16\right)^5+C$$

נציב (3, 4):

$$3=\left(4^2-16\right)^5+C$$

$$\boxed{3=C}$$

תשובה: $f(x)=\left(x^2-16\right)^5+3$

ב. $f'(x)=0 \quad \Leftarrow \quad 10x\left(x^2-16\right)^4=0$

$$\swarrow \searrow$$

$$10x=0 \qquad\qquad x^2-16=0$$

$$x=0 \qquad\qquad x=\pm 4$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$y=(-16)^5+3 \qquad\qquad y=3$$

נאפיין את סוג הנקודות באמצעות טבלה:

x	$x<-4$	-4	$-4<x<0$	0	$0<x<4$	4	$x>4$
y'	$-$	פיתול	$-$	מינימום	$+$	פיתול	$+$
y	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

מסקנות: $(4,3)$ $(-4,3)$ נקודות פיתול.

$x=0$ נקודת מינימום.

ג. $f(x)=(x^2-16)^5+3$

כאשר $f(x)=0$

$$(x^2-16)^5+3=0$$

$$(x^2-16)^5=-3 \,/\sqrt[5]{\ }$$

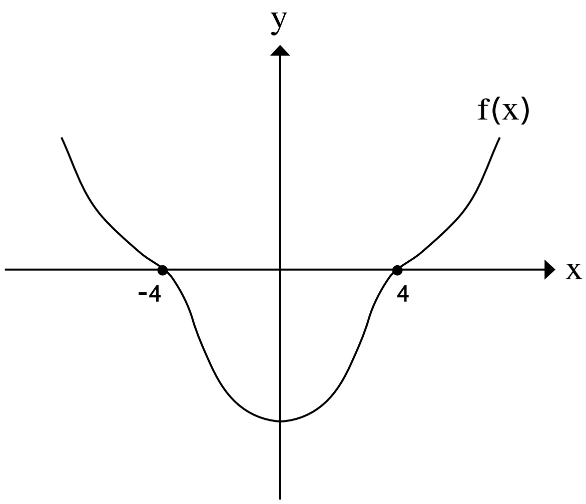
$$x^2=16-1.245$$

$$x^2=14.754$$

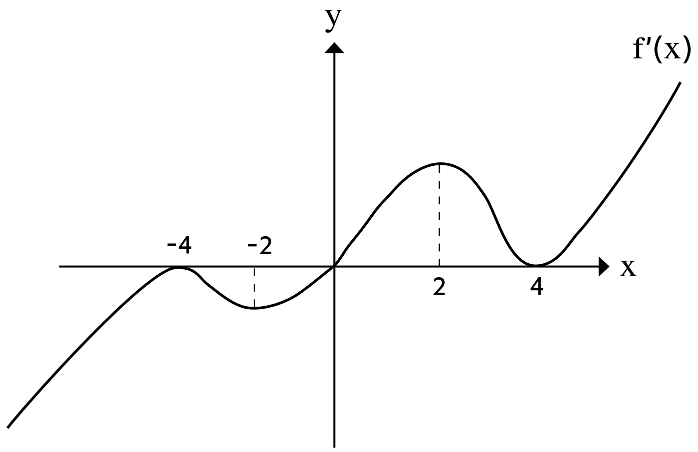
$$x=\pm 3.84$$

$(-3.84,0)$ $(3.84,0)$

ד. גרף הפונקציה



ה. על סמך הטבלה והתוצאות מסעיפים קודמים



הסבר: גרף הנגזרת $f'(x)=10x(x^2-16)^4$

מתאפס בנקודות $x=\pm 4,\ \ x=0$

ועל פי תחומי חיוביות/שליליות המוצגים בטבלה בסעיף ב.

ו.

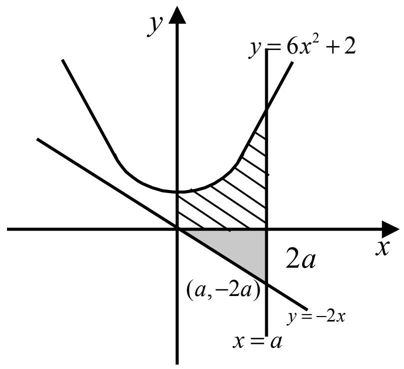
$$\int_0^4 f'(x)dx+\int_{-4}^{0}-f'(x)dx$$

$$=f(x)\Big|_0^4-f(x)\Big|_{-4}^{0}=$$

$$=f(4)-f(0)-f(0)+f(-4)=6-2f(0)$$

הערה: $f(4)=f(-4)=3$ חושב בסעיף ב.

פתרון שאלה 8



א. נסמן: S_1 – שטח מקווקו (עליון).

S_2 – שטח מנוקד (תחתון).

$$S_2 = S_\Delta = \frac{a\cdot 2a}{2} = a^2$$ מנוקד

$$S_1 = \int_0^a \left(6x^2+2\right)dx = \frac{6x^3}{3}+2x \Big|_0^a = 2a^3+2a$$ מקווקו

נבנה את הפונקציה כפונקציה של a, המתארת את יחס השטחים, ועבורה נמצא מינימום, כלומר:

$$\mathrm{f}(a) = \frac{2a^3+2a}{a^2} = 2a+\frac{2}{a}$$

$$f'(a) = 2-\frac{2}{a^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2=2 \Rightarrow a^2=1$$

$$\Rightarrow a=\pm 1$$

$\boxed{a=1}$ ולכן $a>0$

x	0		1	
$\mathrm{f}'(a)$		–	מינימום	+
$\mathrm{f}(a)$		↘		↗

עבור $a=1$ יחס השטחים הוא מינימלי.

ב. $h(x)=\frac{6x^2+2}{-2x}$

1. תחום הגדרה: $x\neq 0$

2. נקודות קיצון: $h'(x)=\frac{12x\cdot(-2x)+2(6x^2+2)}{(-2x)^2}$

$$h'(x)=\frac{-24x^2+12x^2+4}{4x^2}=$$

$$h'(x)=\frac{-12x^2+4}{4x^2}=0$$

$$-12x^2+4=0$$

$$x^2=\frac{1}{3}$$

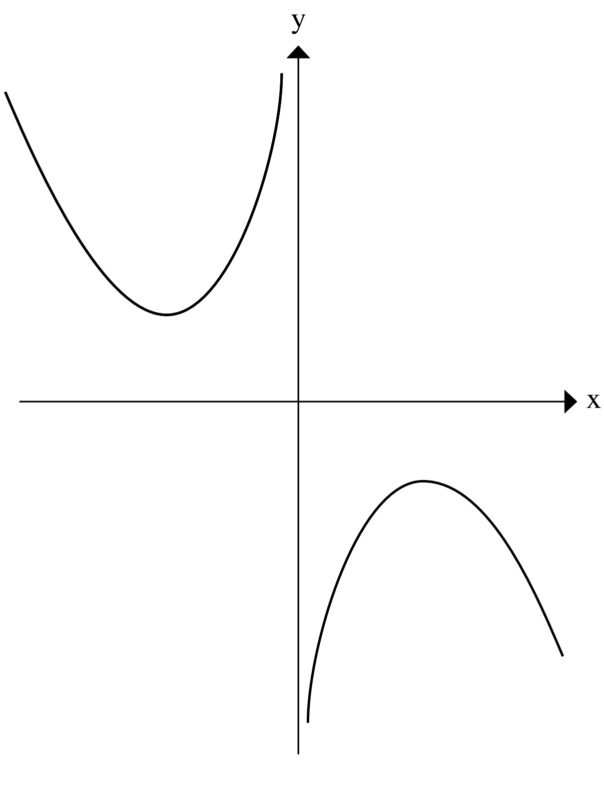
$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$h''(x)=-24x$$

$$h''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)<0 \quad \max \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}},-3.46\right)\max$$

$$h''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0 \quad \min \qquad \Rightarrow \qquad \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},3.46\right)\min$$

גרף הפונקציה:



3. $h'(x) = -3 + \frac{1}{x^2}$

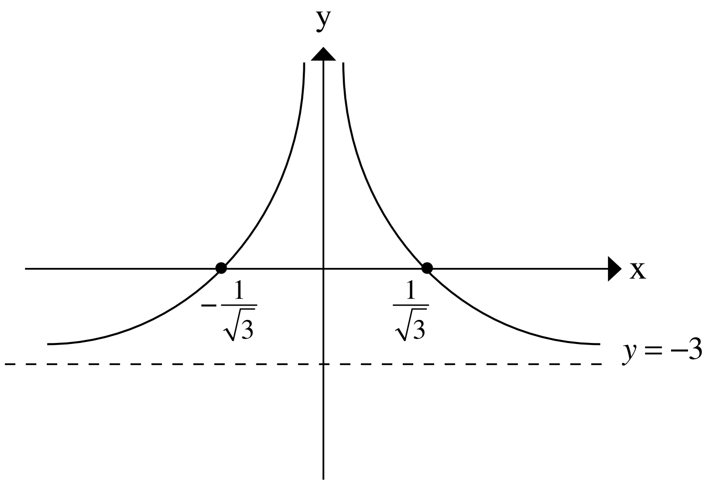
אסימפטוטות: $x = 0 \quad y = -3$

כאשר $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $h(x)$ יורדת לכן $h'(x)$ שלילית

כאשר $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{-1}{\sqrt{3}} < x < 0$ $h(x)$ עולה לכן $h'(x)$ חיובית

כאשר $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ $h(x)$ יורדת לכן $h'(x)$ שלילית

גרף אפשרי של הנגזרת:



פתרון שאלה 9

א. נקודת המינימום $f'(x)=0$, כלומר: $2x-2=0$

$$\min\ (1,4) \quad \Leftarrow \boxed{x=1}$$

נתון: $f'(x)=\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

נשתמש ב**שיטת ההצבה**:

נסמן: $u=x^2-2x+5$

נקבל: $\frac{du}{dx}=2x-2$

מכאן: $du=(2x-2)dx$

או

באמצעות "ניחוש" על פי זיהוי הנגזרת הפנימית והחיצונית ובדיקה שאכן מתקבל הביטוי בתוך האינטגרנט

$$\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=2\sqrt{x^2-2x+5}+C$$

נבצע אינטגרל ל-$f'(x)$ לקבלת $f(x)$ ונציב את התוצאות שקיבלנו.

$$f(x)=\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\int \frac{du}{\sqrt{u}}=\int (u)^{-\frac{1}{2}}du=\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$$

$$f(x)=2\sqrt{u}+c$$

נציב את הביטוי עבור u ונקבל: $f(x)=2\sqrt{x^2-2x+5}+c$

לקבלת C נציב $(1,4)$: $4=2\sqrt{1^2-2\cdot 1+5}+c$

$$4=4+c \qquad \Rightarrow \boxed{c=0}$$

תשובה: $f(x)=2\sqrt{x^2-2x+5}$

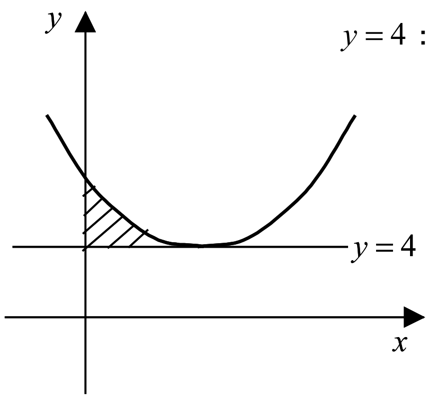
ב. תחום הגדרה: $x^2-2x+5>0$, $\Delta<0$, ביטוי חיובי לכל x.

הפונקציה מוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה מופיע בסעיף הבא לצורך חישוב שטח.

ג. משוואת המשיק בנקודת המינימום: $y=4$

גרף הפונקציה:



נחשב את נפח גוף הסיבוב.

$$V=\pi\int_0^1\left[f(x)\right]^2dx-\pi\int_0^1(4)^2dx=\pi\int_0^1 4\left(x^2-2x+5\right)dx-\pi\int_0^1 16dx=$$

$$=4\pi\left(\frac{x^3}{3}-x^2+5x\right)\Bigg|_0^1-16\pi x\Bigg|_0^1=4\pi\left(\frac{1}{3}-1+5\right)-16\pi=\frac{4\pi}{3}$$

ד. $g(x)=f'(x)$

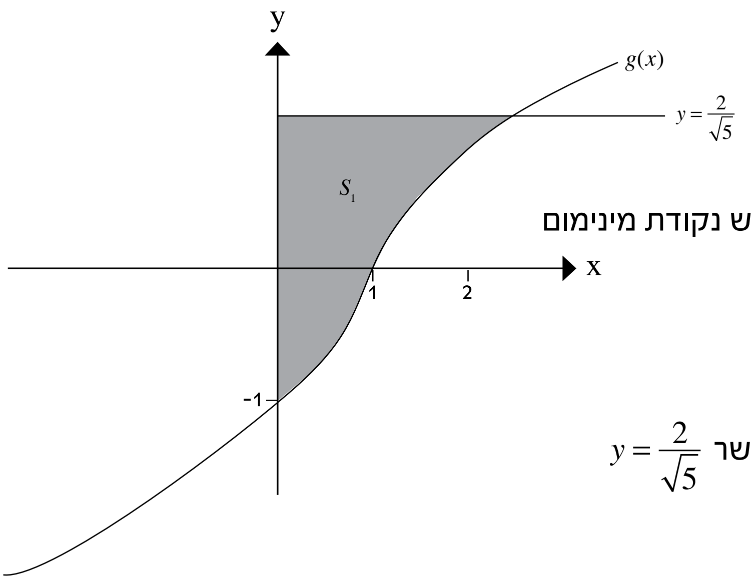
1. $f'(x)=0$

מסעיף קודם כאשר $x=1$ ל- $f(x)$ יש נקודת מינימום

כאשר $x<1$, $f'(x)$ שלילית

כאשר $x>1$, $f'(x)$ חיובית

2. נמצא את נקודת החיתוך בין $g(x)$ לישר $y=\frac{2}{\sqrt{5}}$



$$\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \; / (\;)^2 : 2$$

$$5(x-1)^2=x^2-2x+5$$

$$5x^2-10x+5=x^2-2x+5$$

$$4x^2-8x=0$$

$$4x(x-2)=0$$

בבדיקה אינו פתרון של המשוואה $x=0$ $\quad x=2 \qquad f(x)=2\sqrt{x^2-2x+5}$

$$S_1=\int_0^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}-f'(x)\right)dx=\frac{2}{\sqrt{5}}x-f(x)\Big|_0^2=\frac{4}{\sqrt{5}}-f(2)+f(0)=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

פתרון מבחן מתכונת מס' 26

תשובות

פתרון שאלה 1

		מהירות	זמן	דרך
לפני הפגישה	רוכב אופניים	x	$\frac{200}{x}$	200
	רוכב קטנוע	y	$\frac{200}{y}$	200
אחרי הפגישה	רוכב אופניים	x	4	$4x$
	רוכב קטנוע	y	4	$4y$

נפגשו באמצע הדרך, כל רוכב נסע 200 ק"מ

משוואה I:

רוכב הקטנוע יצא שעתיים אחרי רוכב האופניים, כלומר: $\frac{200}{x}=\frac{200}{y}+2$

משוואה II: $4x+4y=180$

II	I
$4x+4y=180 \quad /:4$	$\frac{200}{x}=\frac{200}{y}+2 \quad /\cdot xy$
$x+y=45$	$200y=200x+2xy$

$y=45-x$ נציב ביטוי זה במשוואה I:

$$200(45-x)=200x+90x-2x^2$$

$$2x^2-490x+9000=0$$

$$x_{1,2}=\frac{490\pm 410}{4}=\begin{cases}\cancel{225} & \text{לא ייתכן}\\ 20\end{cases}$$

$$\Rightarrow y=45-20=25$$

תשובה:

מהירות רוכב האופניים 20 קמ"ש.

מהירות רוכב הקטנוע 25 קמ"ש.

פתרון שאלה 2

1. נתונה הסדרה ההנדסית: $1, 5, 25, ...$

שבה: $a_1 = 1 \ , \ q = 5$.

נתון כי סכום 3 איברים החל במקום ה-k הוא 19375

כלומר $S_3 = 19,375$ החל ב-a_k

$$\frac{a_k(q^3-1)}{q-1} = 19,375$$

$$\frac{a_k(5^3-1)}{5-1} = 19,375 \ / \cdot 4$$

$$a_k \cdot 124 = 77,500 / :124$$

$$a_k = 625$$

$$a_1 \cdot q^{k-1} = 625$$

$$1 \cdot 5^{k-1} = 5^4$$

$$k-1 = 4$$

$$k = 5$$

תשובה: $a_5 = 625$

נוסחאות:

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

2. א. בסדרה 2n איברים.

נתון: $3 \cdot S_n = S_{2n} - S_n$

$$\Downarrow$$

$$4 \cdot S_n = S_{2n}$$

נוסחה:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

נציב בנוסחת הסכום לסדרה חשבונית

$$4 \cdot \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = \frac{2n}{2}\left[2a_1 + (2n-1)d\right]$$

$$2n(2a_1 + nd - d) = n(2a_1 + 2nd - d)$$

נחלק את שני אגפי המשוואה ב: $n \neq 0$ (n מספר טבעי)

ונקבל: $2(2a_1 + nd - d) = 2a_1 + 2nd - d$

$$4a_1 + \cancel{2nd} - 2d = 2a_1 + \cancel{2nd} - d$$

$$2a_1 = d$$

ב. נתון: $a_{2n}+4=a_n+a_{n+1}$

נציב בנוסחת האיבר הכללי לסדרה חשבונית

$$\cancel{a_1}+(2n-1)d+4=\cancel{a_1}+(n-1)d+a_1+nd$$

$$2nd-\cancel{d}+4=nd-\cancel{d}+a_1+nd$$

$$\cancel{2nd}+4=\cancel{2nd}+a_1$$

$\boxed{a_1=4}$ ומתוצאות סעיף א $2a_1=d$

נקבל $\boxed{d=8}$

נוסחה:

$a_n=a_1+(n-1)d$

ג. $S_n=\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)2d]$ מקום זוגי

$$S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 12+(n-1)16]$$

$$S_n=n(12+8n-8)$$

$$S_n=n(8n+4)$$

$$\boxed{S_n=8n^2+4n}$$

פתרון שאלה 3

נסמן:

A - הצלחה בבדיקה ראשונה.

B - הצלחה בבדיקה שניה.

נתון: $P(B)=0.9 \quad , \quad P(A)=0.8$

$P(\text{הצלחה רק באחת})=P(A\cap \bar{B})+P(\bar{A}\cap B)=0.3$

נסמן: $P(\bar{A}\cap B)=x$

$\Downarrow$

$P(A\cap \bar{B})=0.3-x$

	A	$\bar{A}$	סה"כ
B	0.7	0.2	0.9
$\bar{B}$	0.1	0	0.1
סה"כ	0.8	0.2	

על פי הטבלה:

$P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=0.8$

$P(A\cap B)=0.8-(0.3-x)$

$PA\cap B)=0.5+x$

ידוע כי: $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=0.9$

נציב: $0.5+x+x=0.9$

$2x=0.4$

$x=0.2$

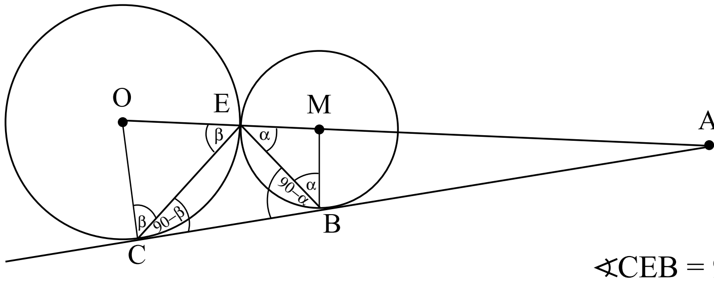
א. $P(A\cap B)=0.7$

ב. $P\left(\begin{array}{c}\text{יעבור לפחות}\\ \text{בדיקה אחת}\end{array}\right)=1-P(\bar{A}\cap \bar{B})=1-0=1$

משמעות הפתרון היא כי יש סיכוי של 100% שהמכשיר יעבור את אחת הבדיקות או את שתיהן.

ג. $P(\bar{B}/A)=\dfrac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.8}=\dfrac{1}{8}$

פתרון שאלה 4



א. צ"ל: $\sphericalangle CEB = 90°$

בניית עזר: MB, OC רדיוסים.

$\sphericalangle MBC = \sphericalangle OCB = 90°$ רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה

$\sphericalangle MEB = \sphericalangle MBE = \alpha$ זווית בסיס במשולש שו"ש ΔMEB

$\sphericalangle OEC = \sphericalangle OCE = \beta$ זווית בסיס במשולש שו"ש ΔOCE

$\sphericalangle EBC = 90° - \alpha$ חיסור זווית

$\sphericalangle ECB = 90° - \beta$ חיסור זווית

$\Downarrow$

$\sphericalangle CEB = \alpha + \beta$ חישוב זווית ב-ΔCEB השלמה ל-$180°$

$\sphericalangle OEM = 180°$ זווית שטוחה

$\Downarrow$

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$ סכום זוויות על ישר

$2\alpha + 2\beta = 180 \; /:2$

$\alpha + \beta = 90°$

$\Downarrow$

$\sphericalangle CEB = 90°$ מ.ש.ל.

ב. ב- ΔAEB , ΔAEC

$\sphericalangle A = \sphericalangle A$ זווית משותפת

$\sphericalangle ECB = 90 - \beta$ מסעיף קודם

על פי סעיף א': $\alpha = 90 - \beta$

$\Downarrow$

$\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACE = \alpha$

$\Downarrow$

$\Delta AEB \sim \Delta ACE$ (ז.ז)

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{AE}{AC}} = \frac{EB}{CE} = \boxed{\frac{AB}{AE}}$$ יחס הדמיון

$$\Downarrow$$

$AE^2 = AC \cdot AB$ מ.ש.ל.

ג. נתון: $AB =$ 16 ס"מ , $BC =$ 9 ס"מ $\Leftarrow$ $AC =$ 25 ס"מ

נציב בתוצאת סעיף ב'.

$$AE^2 = 25 \cdot 16$$

$$AE^2 = 400 / \sqrt{\ }$$

$AE =$ 20 ס"מ

ב-ΔACO

משפט פיתגורס $CO^2 + AC^2 = AO^2$

נסמן: $CO = OE = R$

$$\Downarrow$$

$$AO = AE + OE = 20 + R$$

נציב: $R^2 + 25^2 = (20 + R)^2$

$$R^2 + 625 = 400 + 40R + R^2$$

$$225 = 40R / : 40$$

$$\boxed{5\frac{5}{8} = R}$$

ב-ΔABM

משפט פיתגורס $MB^2 + AB^2 = AM^2$

נסמן: $ME = MB = r$

$$AE = AM + ME$$

$$20 = AM + r$$

$$AM = 20 - r$$

נציב: $r^2 + 16^2 = (20 - r)^2$

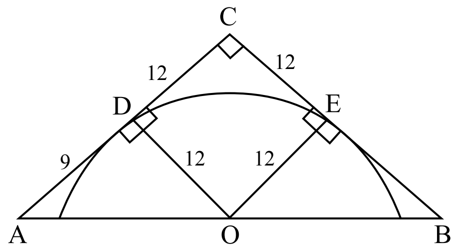
$$r^2 + 256 = 400 - 40r + r^2$$

$$40r = 144$$

$$\boxed{r = 3.6}$$

תשובה: $5\frac{5}{8}$ ס"מ , 3.6 ס"מ

פתרון שאלה 5



א. ב- ΔAOD , ΔABC

$\sphericalangle ADO = 90°$ רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה.

$\sphericalangle C = 90°$ נתון

$\sphericalangle A = \sphericalangle A$ זווית משותפת

$\Downarrow$

$\Delta AOD \sim \Delta ABC$ (ז.ז) מ.ש.ל.

ב. $\dfrac{OD}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$ יחס הדמיון סעיף א'.

נתון: $R =$ 12 ס"מ

$\Downarrow$

$OD = OE =$ 12 ס"מ רדיוסים

$\sphericalangle C = \sphericalangle E = \sphericalangle D = 90°$ נתון + רדיוס מאונך למשיק

$\Downarrow$

ODCE ריבוע - מלבן שבו זוג צלעות סמוכות (רדיוסים) שוות.

$\Downarrow$

$DC = CE =$ 12 ס"מ

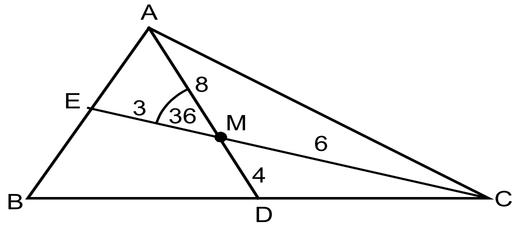
נתון: $AC =$ 21 ס"מ $\Leftarrow$ $AD =$ 9 ס"מ

נציב בהתאם על פי יחס הדמיון ונקבל

$$\frac{12}{BC} = \frac{9}{21}$$

תשובה: $BC =$ 28 ס"מ

פתרון שאלה 6



משפט

נקודת מפגש התיכונים מחלקת את התיכונים ביחס 1 : 2, החלק הגדול הוא החלק הקרוב לקודקוד

לכן נתון: $AD = 12$, כלומר: $MD = 4$, $AM = 8$

נתון כי: $CE = 9$, כלומר: $ME = 3$, $MC = 6$

$\measuredangle AME = 36^\circ$

א. נתבונן ב- ΔAME.

לפי משפט הקוסינוסים:

$$AE^2 = 8^2 + 3^2 - 2\cdot 8\cdot 3\cos 36 \quad /\sqrt{\ }$$

$$AE = 5.85 \quad \Rightarrow AB = AE + EB \underset{AE=EB}{\overset{\downarrow}{=}} AB = 2\cdot 5.85 = 11.7 \text{ ס"מ}$$

נתבונן ב- ΔDMC:

$$DC^2 = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cos 36 \quad /\sqrt{\ }$$

$$DC = 3.63 \quad \Rightarrow BC = BD + DC, \quad BD = DC \quad \Rightarrow BC = 2\cdot 3.63 = 7.26 \text{ ס"מ}$$

תשובה: $AB = 11.7$ ס"מ, $BC = 7.26$ ס"מ

ב. נתבונן ב- ΔADB. נסמן: $\measuredangle ADB = \alpha$

לפי משפט הקוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

נבודד מתוך הנוסחה את $\cos\gamma$: $\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2ab}$

נציב על-פי הנתונים:

$$\cos\alpha = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2\cdot AD\cdot BD}$$

$$\cos\alpha = \frac{12^2 + 3.63^2 - 11.7^2}{2\cdot 12\cdot 3.63} = 0.232$$

תשובה: $\alpha = 76.53^\circ$

הערה: תיכון מחלק משולש לשני משולשים שווי שטח, לשניהם צלע וגובה לצלע זהים.

ג. לכן: $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ADC} \Leftarrow$

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta ABD} = \cancel{2}\cdot\frac{AD\cdot BD\cdot\sin\alpha}{\cancel{2}} = 12\cdot 3.63\cdot\sin 76.53^\circ$$

תשובה: $S_{\Delta ABC} =$ 42.36 סמ"ר

ד. נמצא את $\sphericalangle ABC$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{AB\cdot BD\cdot\sin\sphericalangle ABC}{2}$$

$$\frac{11.7\cdot 3.63\cdot\sin\sphericalangle ABC}{2} = \frac{42.36}{2}$$

$$\sphericalangle ABC = 85.856^\circ$$

$\sphericalangle EMD = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ זוויות צמודות

$$\Downarrow$$

$\sphericalangle ABC + \sphericalangle EMD = 229.85^\circ > 180^\circ$ לכן המרובע אינו בר חסימה.

ה. $AC^2 = 11.7^2 + 7.26^2 - 2\cdot 7.26\cdot 11.7\cdot\cos 85.856^\circ$

$AC =$ 13.32 ס"מ

$$\frac{13.32}{\sin 85.856^\circ} = 2R$$

$R =$ 6.68 ס"מ

פתרון שאלה 7

א. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}$

נגזור לקבלת שיפוע המשיק:

$$f'(x)=\frac{2\sqrt{x^2+16}-2x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 16}}}{x^2+16}=\frac{2\left(x^2+16\right)-2x^2}{\sqrt{x^2+16}}\cdot\frac{1}{x^2+16}$$

$$=\frac{32}{\left(x^2+16\right)\sqrt{x^2+16}}$$

$$y'_{(x=0)}=\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$$

משוואת המשיק בנקודה (0,0):

תשובה: $y=\frac{1}{2}x$

ב. חישוב השטח: $\int_0^3\left(\frac{1}{2}x-\frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}-\underbrace{2\sqrt{x^2+16}}_{*}\Big|_0^3=$

* הסבר למטה

תשובה: $=\left(\frac{3^2}{4}-2\sqrt{25}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{0^2}{2}-2\sqrt{16}\right)=\ 0.25$

* נשתמש בשיטת "הניחוש" כלומר על פי זיהוי הנגזרת הפנימית או החיצונית. נגזור את הביטוי * כדי לבדוק שאכן מתקבל הביטוי בתוך האינטגרנט.

או * נשתמש ב**שיטת ההצבה**:

נסמן: $u=x^2+16$

על-ידי גזירה של שני האגפים נקבל: $du=2xdx$

$dx=\frac{du}{2x}$ נחליף ביטוי זה ב- dx באינטגרל

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+16}}dx=\int\frac{2x}{\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{2x}=\int\frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$=2\sqrt{u}=2\sqrt{x^2+16}$$

ג. $g(x)=\frac{\sqrt{x^2+16}}{2x}$

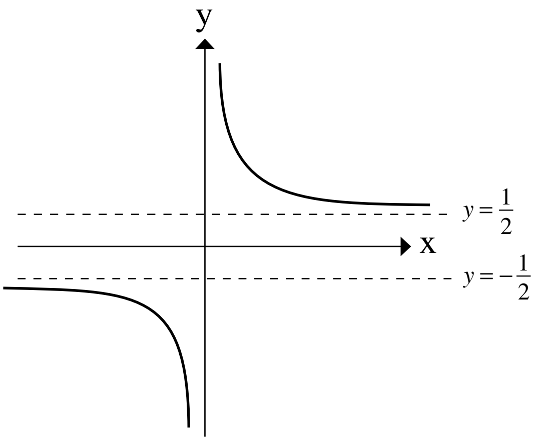
1. תחום הגדרה: $x\neq 0$

נגזרת הפונקציה

$$g'(x)=\frac{\frac{2x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+16}}-2\sqrt{x^2+16}}{(2x)^2} \Rightarrow g'(x)=\frac{2x^2-2(x^2+16)}{4x^2\sqrt{x^2+16}}$$

$$g'(x)=\frac{-32}{4x^2\sqrt{x^2+16}}<0$$

$g'(x)<0$ לכל $x\neq 0$ לכן הפונקציה יורדת לכל x בתחום הגדרתה.



2. גרף הפונקציה $g(x)$:

אסימפטוטות: x = 0

$x\to +\infty \quad y=\frac{1}{2}$

$x\to -\infty \quad y=-\frac{1}{2}$

3.
$$V_1=\pi\int_2^4\left(\frac{\sqrt{x^2+16}}{2x}\right)^2 dx=\pi\int_2^4\left(\frac{x^2+16}{4x^2}\right)dx$$

$$=\pi\int_2^4\left(\frac{x^2}{4x^2}+\frac{16}{4x^2}\right)dx=\pi\int_2^4\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{4}x-\frac{4}{x}\right]\Big|_2^4=\pi\left[(1-1)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right]=1.5\pi$$

$$V_2=\pi\int_2^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx=\pi\left(\frac{1}{4}x\right)\Big|_2^4=\pi-\frac{1}{2}\pi=\frac{1}{2}\pi$$

תשובה: $V=1.5\pi-0.5\pi=\pi$

פתרון שאלה 8

א. $f(x)=x\sqrt{x}+4$

נגזור פעמיים את הפונקציה כדי לבדוק את סימן הנגזרת השנייה:

$$f'(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}\cancel{\sqrt{x}}}{2\cancel{\sqrt{x}}}=\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$\frac{3}{4\sqrt{x}}$ הוא ביטוי חיובי לכל $x>0$ ולכן כאשר $f''(x)$ הוא ביטוי חיובי, הפונקציה קעורה כלפי מעלה בכל תחום הגדרתה.

ב. למציאת נקודת השקה נסמנה ב-$(t,t\sqrt{t}+4)$ ונשווה בין שיפוע לפי נגזרת ובין שיפוע לפי נוסחה, כלומר:

נוסחה לחישוב שיפוע

$$\boxed{m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$$

$$f'(t)=\frac{\overbrace{3\sqrt{t}}^{\text{שיפוע לפי נגזרת}}}{2} \qquad \frac{\overbrace{t\sqrt{t}+4-0}^{\text{שיפוע לפי נוסחה}}}{t-0} \qquad \Rightarrow \frac{3\sqrt{t}}{2}=\frac{t\sqrt{t}+4}{t}\Rightarrow$$

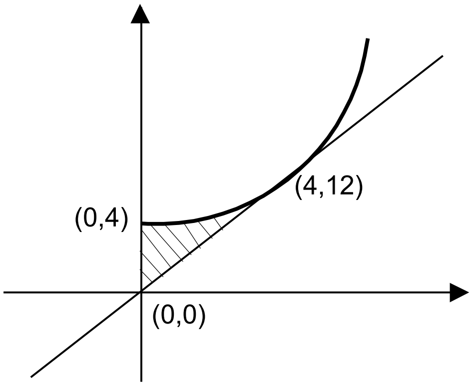
$$3t\sqrt{t}=2t\sqrt{t}+8 \quad\Rightarrow\quad t\sqrt{t}=8 \quad /(\ )^2 \quad\Rightarrow\quad t^3=64 \quad\Rightarrow\quad t=4$$

נקודת ההשקה: $(4,12)$

שיפוע המשיק: $f'(4)=\frac{3\sqrt{4}}{2}=3$

משוואת המשיק: $y=3x$

ג.



חישוב השטח:

$$S=\int_0^4\left(x\sqrt{x}+4-3x\right)dx=\int_0^4\left(x^{1.5}+4-3x\right)dx=$$

$$=\frac{x^{2.5}}{2.5}+4x-\frac{3x^2}{2}\Big|_0^4=\frac{4^{2.5}}{2.5}+4\cdot4-\frac{3\cdot4^2}{2}=4.8$$

ד.

$$V=\pi\int_0^4\left(x\sqrt{x}+4\right)^2dx-\pi\int_0^4(3x)^2\,dx=\pi\int_0^4\left(x^3+8x^{1.5}+16\right)dx-\pi\int_0^4 9x^2dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^4}{4}+\frac{8x^{2.5}}{2.5}+16x\right)\Big|_0^4-\pi\left(\frac{9x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\pi\left(\frac{4^4}{4}+\frac{8\cdot4^{2.5}}{2.5}+16\cdot4\right)-\pi\left(\frac{9\cdot4^3}{3}\right)=$$

$$=230.4\pi-192\pi=38.4\pi$$

ה. $g(x)=f(x)=-x\sqrt{-x}+4=(-x)^{1.5}+4$

תחום הגדרה: $-x\geq0$

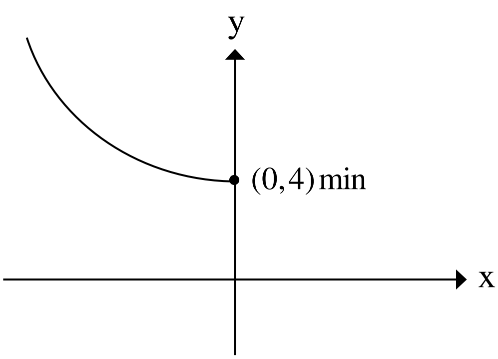
$x\leq0$

$g'(x)=-1.5(-x)^{0.5}=-1.5\sqrt{-x}$

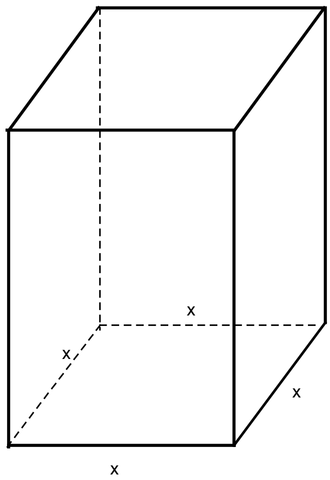
$g''(x)=0.25(-x)^{-0.5}=\frac{1}{4\sqrt{-x}}$

$g'(x)<0$ לכן $g(x)$ יורדת לכל $x\leq0$

$g''(x)>0$ לכן $g(x)$ קעורה כלפי מעלה לכל $x\leq0$



פתרון שאלה 9



נסמן: צלע הבסיס = x.

נתון כי נפח התיבה 400 סמ"ק.

נוסחה לחישוב נפח:

גובה X שטח הבסיס = V

נקבל את גובה התיבה h מבוטא באמצעות x.

$$400 = x^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{400}{x^2}$$

שטח שני הבסיסים: $2x^2$.

עלות הבסיסים: $2x^2 \cdot 32 = 64x^2$

שטח ארבע פאות צדדיות: $4 \cdot x \cdot \frac{400}{x^2} = \frac{1600}{x}$ ועלותן: $16 \cdot \frac{1600}{x} = \frac{25600}{x}$

הפונקציה שנבנה מייצגת את ההוצאות על החומר:

$$\mathrm{f}(x) = 64x^2 + \frac{25600}{x}$$

$$\mathrm{f}'(x) = 128x - \frac{25600}{x^2} = 0$$

$$128x^3 - 25600 = 0$$

$$x^3 = 200$$

$$x = \sqrt[3]{200} \sim 5.84$$

x	0		5.84	
$\mathrm{f}'(x)$		–	מינימום	+
$\mathrm{f}(x)$		↘		↗

ממדי התיבה שעבורם ההוצאות על החומר מינימליות:

תשובה: אורך צלע הבסיס: $\sqrt[3]{200}$ ס"מ

גובה התיבה: $\frac{400}{\left(\sqrt[3]{200}\right)^2} \approx 11.69$ ס"מ