פתרון מבחן מס׳ 21

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. להוכיח כי סדרה c_n היא סדרה הנדסית משמע להוכיח כי היחס בין איברים סמוכים בסדרה הוא מספר קבוע. אם q היא מנת הסדרה b_n: $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{b_{2n+1}}{b_{2n-1}} = \frac{b_1q^{2n}}{b_1q^{2n-2}} = q^2$ מכיוון ש-q^2 הוא מספר קבוע, סדרה c_n היא סדרה הנדסית.

מכיוון ש- $|q| < 1$ גם $q^2 < 1$ כלומר, סדרה c_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת.

ב. נשתמש בנוסחת סכום סדרה הנדסית אינסופית יורדת כדי לרשום את הנתון:

$$\frac{b_1}{1-q^2} = 0.8 \cdot \frac{b_1}{1-q} \qquad / : \frac{b_1}{1-q^2}$$

$$1 = 0.8(1+q)$$

$$q = \frac{1}{4}$$

מנת הסדרה b_n היא $\frac{1}{4}$, מנת הסדרה c_n היא $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

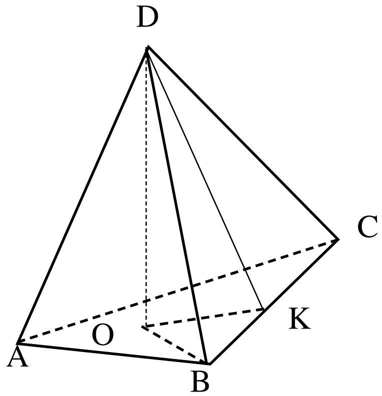
פתרון לשאלה 2

א. נתון: $BC = AB = AC = AD = BD = CD = a$.

בפירמידה הנתונה כל מקצועותיה הצדדיים שווים, כלומר הפירמידה היא פירמידה ישרה.

DO הוא גובה הפירמידה. בפירמידה ישרה עקב הגובה (נקודה O) הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס. במשולש שווה צלעות מרכז המעגל החוסם הוא נקודת החיתוך של התיכונים במשולש.

קטע OB הוא $\frac{2}{3}$ של התיכון במשולש שווה צלעות ABC: $OB = \frac{2}{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$



לפי משפט פיתגורס במשולש ישר זווית DOB:

$$DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

DK הוא תיכון וגובה במשולש שווה שוקיים BDC.

לפי משפט פיתגורס, במשולש ישר זווית DKB:

$$DK = \sqrt{DB^2 - KB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

הזווית שבין הפאה הצדדית CDB ובין הבסיס היא הזווית DKO

(הזווית בין שני האנכים לישר החיתוך BC של מישורים אלה).

במשולש ישר זווית DKO: $DO = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, $DK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$$\tan\angle DKO = \frac{DO}{OK} = a\sqrt{\frac{2}{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \rightarrow \angle DKO \approx 43.31°$$

גודל הזווית שבין הפאה הצדדית ובין הבסיס הוא כ-$43.31°$.

ב. שטח הבסיס שווה לשטח הפאה הצדדית DBC כי הם משולשים חופפים: $S_{DBC} = \frac{1}{2}DK \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

נפח הפירמידה: $V = \frac{1}{3}S_{DBC} \cdot DO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. נכתוב את הנתונים עבור שנת 2011: $M_0 = 400{,}000$, $M_t = 286{,}000$, $t = 3$, עלינו למצוא את q.

$$q = \sqrt[3]{0.715} \approx 0.8942 \quad \leftarrow \quad q^3 = \frac{286{,}000}{400{,}000} = 0.715 \quad \leftarrow \quad 286{,}000 = 400{,}000 \cdot q^3$$

נכתוב את הנתונים עבור שנת 2015: $M_0 = 400{,}000$, $t = 7$, $q = 0.8942$. עלינו למצוא את M_t.

$$M_t = 400{,}000 \cdot 0.8942^7 \approx 182{,}853$$

ערך היאכטה בשנה 2015 יהיה כ-182,853 ש"ח.

ב. 30% ממחיר יאכטה חדשה הוא 120,000 ₪ ($400{,}000 \cdot 0.3 = 120{,}000$).

נרשום את הנתונים המתאימים: $q = 0.8942$, $M_0 = 400{,}000$, $M_t = 120{,}000$. עלינו למצוא את t.

שימו לב: ניתן לפתור את השאלה מבלי לחשב 30% ממחיר יאכטה חדשה באמצעות כתיבה: $M_t = 0.3M_0$

$$120{,}000 = 400{,}000 \cdot 0.8942^t \rightarrow 0.8942^t = 0.3 \rightarrow t = \log_{0.8942} 0.3 \approx 10.76$$

ערך היאכטה ירד ל-30% ממחירה של יאכטה חדשה אחרי 11 שנה.

פתרון לשאלה 4

כדי לפתור משימה זו יש לבצע שלבים רבים שאינם כתובים כסעיפים בשאלה. חלק חשוב בפתרון המשימה הוא תכנון.

תכנון אפשרי:

(1) נמצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-x.

(2) נמצא את נגזרת הפונקציה f(x).

(3) נכתוב את משוואות המשיקים לגרף בנקודות החיתוך של הגרף עם ציר ה-x.

(4) נמצא את נקודות החיתוך של שני המשיקים.

(5) נחשב את השטח המוגבל בגרף הפונקציה f(x) ובשני המשיקים כסכום של שני אינטגרלים.

(1) נמצא נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-x:

$$f(x) = -2\cos 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \text{ או } 2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ או } x = \frac{3\pi}{4}$$

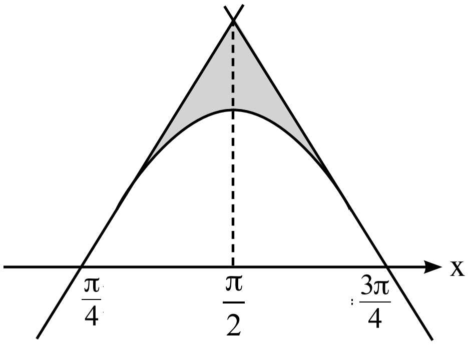
(2) $f'(x) = 4\sin 2x$

(3) המשיק לגרף בנקודה $x = \frac{\pi}{4}$: $f(\frac{\pi}{4}) = 0,\ f'(\frac{\pi}{4}) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4$, משוואת המשיק: $y = 4(x - \frac{\pi}{4})$

או $y = 4x - \pi$

המשיק לגרף בנקודה $x=\frac{3\pi}{4}$: $f(\frac{3\pi}{4})=0,\ f'(\frac{3\pi}{4})=4\sin\frac{3\pi}{2}=-4$ משוואת המשיק: $y=-4(x-\frac{3\pi}{4})$

או $y=-4x+3\pi$



(4) נקודת החיתוך של שני המשיקים:

$$4x-\pi=-4x+3\pi \rightarrow 8x=4\pi \rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

(5) השטח המוגבל בגרף הפונקציה f(x) ובשני המשיקים :

$$S=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4x-\pi-f(x))\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(-4x+3\pi-f(x))\,dx=(2x^2-\pi x+\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+(-2x^2+3\pi x+\sin 2x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}=$$

$$=(\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{2}+\sin\pi)-(\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{4}+\sin\frac{\pi}{2})+(-\frac{9\pi^2}{8}+\frac{9\pi^2}{4}+\sin\frac{3\pi}{2})-(-\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\pi^2}{2}+\sin\pi)=\frac{\pi^2}{4}-2\approx 0.467$$

פתרון לשאלה 5

א. נמצא את נגזרת הפונקציה f(x): $f'(x)=2ax-\frac{1}{x+1}$.

בנקודת הקיצון שבה x = 1 ערך הנגזרת הוא 0:

$$a=\frac{1}{4} \quad \leftarrow \quad f'(1)=2a-\frac{1}{2}=0$$

התקבלה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{4}x^2-\ln(x+1)$

ב. הפונקציה f(x) מוגדרת כאשר x + 1 > 0 , כלומר עבור x > -1

תחום ההגדרה של הפונקציה f(x) הוא התחום x > -1

ג. נבדוק האם לפונקציה $f(x)$ יש נקודות קיצון נוספות:

$$f'(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{x+1}=\frac{x(x+1)-2}{2(x+1)}=\frac{x^2+x-2}{2(x+1)}=\frac{(x-1)(x+2)}{2(x+1)}$$

לשבר שהתקבל יש שתי נקודות אפס, אבל רק $x=1$ נמצא בתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. כלומר, לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון נוספות חוץ מהנקודה שבה $x=1$.

בתחום $-1<x<1$ הפונקציה $f(x)$ יורדת

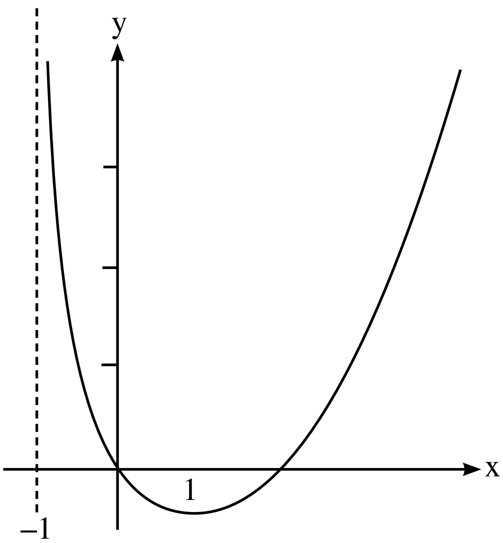
בתחום $x>1$ הפונקציה $f(x)$ עולה.

x	$-1<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	יורדת	$\frac{1}{4}-\ln 2\approx -0.44$	עולה

ד. כדי למצוא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- y

נציב $x=0$: $y=f(0)=0$.

ה.



ו. $f(3)=\frac{1}{4}\cdot 9-\ln 4\approx 1.39$

לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות אפס: $x=0$ ונקודה הנמצאת בין $x=1$ ובין $x=3$, מכיוון ש: $f(1)<0$ ו-$f(3)>0$

פתרון מבחן מס' 22

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. נסמן: $a_1 = b_1 = a, \quad a_2 = b_2 = b$

הפרש הסדרה a_n הוא $(b\text{-}a)$

מנת הסדרה b_n היא $q = \frac{b}{a}$

את הנתון $a_5 = b_3$ אפשר לכתוב כך: $a + 4(b - a) = a \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2$

$$4b - 3a = \frac{b^2}{a} \qquad / : a$$

$$4\frac{b}{a} - 3 = (\frac{b}{a})^2$$

$$q^2 - 4q + 3 = 0$$

$$q_1 = 1,\ q_2 = 3$$

אם $q = 1$, אז כל איברי הסדרה b_n זהים ולפי הנתון הם שונים.

מנת הסדרה b_n היא 3.

ב. הסכום של עשרת האיברים ראשונים של הסדרה a_n הוא:

$$S_{10} = \frac{10(2a+9(b\text{-}a))}{2} = 5(9b - 7a)$$

הסכום של ששת האיברים ראשונים של הסדרה a_n:

$$S_6 = \frac{6(2a+5(b\text{-}a))}{2} = 3(5b - 3a)$$

כעת יש לחשב את היחס בין שני הביטויים, כאשר הערך של כל אחד מהביטויים אינו ידוע.

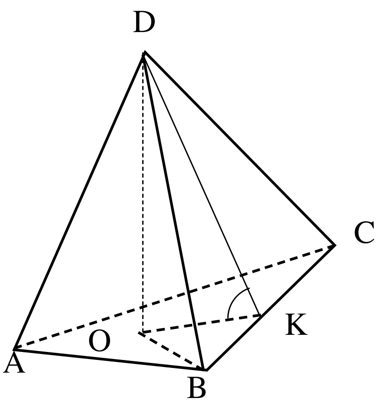
איננו יודעים את ערכי המשתנים a ו- b, אך אנו יודעים את ערך היחס ביניהם q. ניעזר בנתון זה:

$$\frac{S_{10}}{S_6} = \frac{5(9b-7a)\ /:a}{3(5b-3a)\ /:a} = \frac{5(9q-7)}{3(5q-3)} = \frac{5(9\cdot3-7)}{3(5\cdot3-3)} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$$

סכום עשרת האיברים הראשונים של הסדרה a_n גדול מהסכום של ששת האיברים הראשונים של הסדרה a_n פי $2\frac{7}{9}$.

פתרון לשאלה 2

לא נוח לפתור משימה זו בעזרת הנתונים. נוכל לענות על כל השאלות על הפירמידה, אם נדע את אורך צלע הבסיס של הפירמידה. במקרים כאלה יש לסמן את אורך צלע הבסיס, להביע אותו באמצעות S ולמצוא את אורך צלע הבסיס כפתרון המשוואה. לאחר מכן נוכל לענות על כל השאלות.



א. נסמן ב-a את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

במשולש שווה שוקיים וישר זווית DCB:

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

K - אמצע הקטע CB, DK הוא תיכון וגובה במשולש שווה שוקיים DCB.

במשולש ישר זווית BKD: $BK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $BD = a$,

לפי משפט פיתגורס, $KD = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

שטח של כל פאה צדדית של הפירמידה הוא $\frac{1}{2}\cdot a^2$.

שטח המעטפת של הפירמידה הוא סכום השטחים של שלושה משולשים שווי שוקיים חופפים:

$$\frac{3a^2}{2} = S \rightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{3}}.$$

אורך המקצוע הצדדי הוא $\sqrt{\frac{2S}{3}}$. אורך צלע הבסיס $BC = a\sqrt{2} = 2\sqrt{\frac{S}{3}}$

ב. הזווית שבין המקצוע הצדדי DB ובין הבסיס היא הזווית DBO (הזווית שבין DB לבין היטלו BO במישור ABC).

DO הוא גובה הפירמידה. בפירמידה ישרה עקב הגובה (נקודה O) הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס. במשולש שווה צלעות זאת נקודת החיתוך של תיכונים במשולש.

קטע OB הוא $\frac{2}{3}$ של התיכון במשולש שווה צלעות ABC: $OB = \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

לפי משפט פיתגורס, במשולש ישר זווית DOB: $DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

במשולש ישר זווית BOD: $\sin DBO = \frac{DO}{DB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \angle SBO \approx 35.26°$.

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. נכתוב את הנתונים עבור שנת 2005: $M_t = 3 \cdot 10^5$, $M_0 = 7.5 \cdot 10^4$, $t = 4$, עלינו למצוא את q.

$$q = \sqrt[4]{4} \approx 1.4142 \quad \leftarrow \quad q^4 = \frac{3 \cdot 10^5}{7.5 \cdot 10^4} = 4 \quad \leftarrow \quad 3 \cdot 10^5 = 7.5 \cdot 10^4 q^4$$

נכתוב את הנתונים עבור שנת 2015: $M_0 = 7.5 \cdot 10^4, t = 14, q = 1.4142$. עלינו למצוא את M_t.

$$M_t = 7.5 \cdot 10^4 \cdot 1.4142^{14} \approx 9.6 \cdot 10^6$$

בשנת 2015 יהיו ביער 9.6 מיליון טונות של עץ.

ב. נכתוב את הנתונים עבור שש שנים: $t = 6$, $q = 1.4142$

$$M_t = M_0 \cdot 1.4142^6 = 8M_0$$

במהלך שש שנים כמות העץ ביער גדלה פי שמונה או ב־700%.

ג. כאשר כמות העץ ביער מכפילה את עצמה: $M_t = 2M_0$. עלינו למצוא את t.

$$1.4142^t = 2 \quad \leftarrow \quad 2M_0 = M_0 \cdot 1.4142^t$$

$$t = \log_{1.4142} 2 \approx 2$$

כמות העץ ביער מכפילה את עצמה בכל שנתיים.

פתרון לשאלה 4

כדי לפתור משימה זו יש לבצע שלבים רבים שאינם כתובים כסעיפים בשאלה. חלק חשוב בפתרון המשימה הוא תכנון.

תכנון אפשרי:

(1) נמצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

(2) נמצא איזה גרף הוא גרף הפונקציה $f(x)$ ואיזה גרף הוא גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) נחשב את השטח S_1

(4) נחשב את השטח S_2

(5) נחשב את היחס בין שני השטחים $\frac{S_1}{S_2}$.

(1) נמצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים:

$$1+\cos 2x=\sin 2x$$
$$1+(2\cos^2 x-1)=\sin x\cos x$$
$$2\cos^2 x=2\sin x\cos x$$
$$2\cos x(\cos x-\sin x)=0$$
$$\cos x=0 \quad \text{או} \quad \cos x=\sin x$$

אז בתחום הנתון $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$

(2) פונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית והגרף שלה סימטרי ביחס לציר ה-y הגרף המתאים לה הוא הגרף I בשרטוט, פונקציה $g(x)$ היא פונקציה אי-זוגית והגרף שלה סימטרי ביחס לראשית הצירים הגרף המתאים לה הוא הגרף II בשרטוט.

(3) השטח S_1 הוא השטח המוגבל בשני הגרפים ובציר ה-y בגבולות מאפס עד נקודת החיתוך $x=\frac{\pi}{4}$:

$$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(f(x)-g(x))dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2x-\sin 2x)dx=(x+\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\cos}{2}$$

$$=(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{2}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{2})-(0+\frac{\sin 0}{2}+\frac{\cos 0}{2})=\frac{\pi}{4}$$

(4) השטח S_2 מורכב משני חלקים - החלק הראשון מתחת גרף הפונקציה $g(x)$ והחלק השני מתחת גרף הפונקציה $f(x)$:

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (g(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= (-\frac{\cos 2x}{2})\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + (x + \frac{\sin 2x}{2})\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-\frac{1}{2}) + (\frac{\pi}{2}) - (\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

(5) היחס בין שני השטחים $\frac{S_1}{S_2} = 1$

פתרון לשאלה 5

א. גרף 1 מתאים לפונקציה יורדת, כלומר לפונקציה $g(x) = 0.5^x$, כי בסיס הפונקציה המעריכית קטן מ-1.
גרף 2 מתאים לפונקציה יורדת, כלומר לפונקציה $f(x) = 2^x$, כי בסיס הפונקציה המעריכית גדול מ-1.

ב. לפי הגרפים, ערך הפונקציה $f(x) = 2^x$ קטן מערך מתאים של הפונקציה $g(x) = 0.5^x$ כאשר $x < 0$. פתרון האי-שוויון $2^x < 2^{-x}$ הוא $x < 0$.

ג.

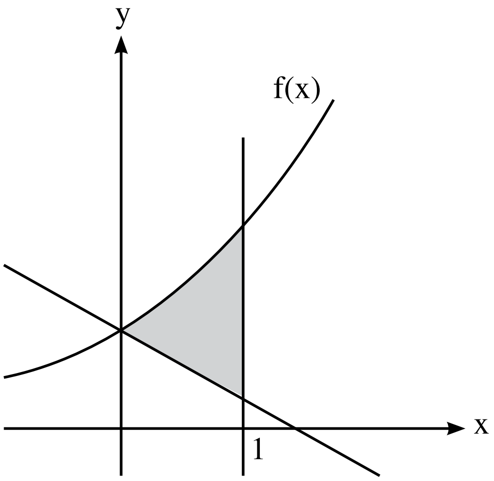
$$S_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2^x dx + \int_0^1 0.5^x dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{0.5^x}{\ln 0.5}\Big|_0^1 = \frac{1-0.5}{\ln 2} + \frac{0.5-1}{-\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.44$$

שטח המוגבל בשני הגרפים, בציר ה-x, בישר $x=-1$ ובישר $x = 1$ הוא $\frac{1}{\ln 2} \approx 1.44$

ד. בנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם ציר ה-y $x = 0$. נמצא $g'(0)$ ו-$g(0)$:

$$g(0) = 1 \;,\;\; g'(0) = \ln 0.5 = -\ln 2 \leftarrow g'(x) = 0.5^x \ln 0.5$$

משוואת המשיק: $y = -\ln 2 \cdot x + 1$



ה. $S_2 = \int_0^1 (f(x) - (1 - x\ln 2)\,dx = \int_0^1 (2^x - 1 + x\ln 2)dx =$

$= (\frac{2^x}{\ln 2} - x + \frac{x^2}{2}\ln 2)\Big|_0^1 = (\frac{2}{\ln 2} - 1 + \frac{\ln 2}{2}) - \frac{1}{\ln 2} =$

$= \frac{1}{\ln 2} - 1 + \frac{\ln 2}{2} \approx 0.79$

השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק והישר $x = 1$ הוא $\frac{1}{\ln 2} - 1 + \frac{\ln 2}{2} \approx 0.79$.

פתרון מבחן מס׳ 23

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. a_1 הוא האיבר הראשון, d הוא הפרש הסדרה a_n, n הוא מספר האיברים בסדרה a_n. נכתוב את כל הנתונים דרך שלושת המשתנים האלה:

האיבר הראשון והאיבר האחרון הם מספרים נגדיים: $a_1 + (a_1 + d(n-1)) = 0$

הסכום של האיבר הרביעי ושל האיבר החמישי הוא -15:

$$(a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = -15 \Rightarrow 2a_1 + 7d = -15$$

יש דרכים שונות לכתוב את הנתון "הסכום של חמשת האיברים האחרונים בסדרה a_n הוא 60".

שימו לב, אם נכתוב את הסדרה a_n בסדר הפוך (מהסוף להתחלה), אז תתקבל סדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא $-a_1$ וההפרש $-d$.

חמשת האיברים האחרונים בסדרה a_n הם חמשת האיברים הראשונים בסדרה זו:

$$\frac{5(-2a_1 - 4d)}{2} = 60 \Rightarrow -a_1 - 2d = 12 \Rightarrow a_1 = -2d - 12$$

נציב במשוואה $2a_1 + 7d = -15$:

$$2(-2d - 12) + 7d = -15 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -6 - 12 = -18$$

כדי למצוא את n נציב כך: $a_1 + (a_1 + d(n-1)) = 0 \Rightarrow -18 + (-18 + 3(n-1)) = 0 \Rightarrow n = 13$

בסדרה a_n יש 13 איברים.

ב. כדי למצוא מספר איברים חיובים בסדרה, נכתוב נוסחה לאיבר הכללי:

$$a_n = -18 + 3(n-1)$$

$$-18 + 3(n-1) > 0$$

$$n > 7$$

כלומר, האיברים החיוביים בסדרה הם איברי הסדרה מהאיבר השמיני ועד האיבר האחרון שמספרו 13.

בסדרה יש שישה איברים חיוביים.

פתרון לשאלה 2

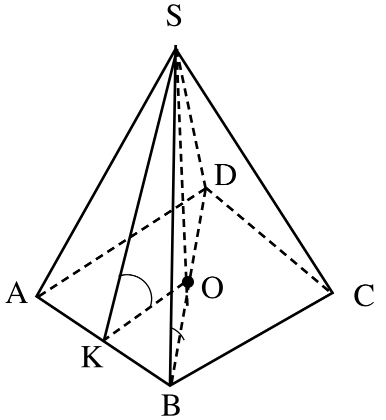
לא נוח לפתור משימה זו בעזרת הנתונים. נוכל לענות על כל השאלות על הפירמידה, אם נדע את אורך צלע הבסיס של הפירמידה. במקרים כאלה יש לסמן את אורך צלע הבסיס, להביע אותו באמצעות S ולמצוא את אורך צלע הבסיס כפתרון המשוואה. לאחר מכן נוכל לענות על כל השאלות.

נסמן ב-a את אורך צלע הבסיס של הפירמידה. אז שטח הבסיס הוא a^2.

לפי הנתון, שטח המעטפת של הפירמידה גדול פי שלושה משטח הבסיס, לכן הוא $3a^2$,

אז שטחה של כל פאה צדדית הוא $\frac{3a^2}{4}$.

K - אמצע הקטע AB, SK הוא תיכון וגובה במשולש שווה שוקיים ASB.



שטחה של כל פאה צדדית ABS :

$$\frac{1}{2}AB\cdot SK=\frac{1}{2}a\cdot SK=\frac{3a^2}{4}\rightarrow SK=\frac{3}{2}a$$

לפי משפט פיתגורס, במשולש KSB :

$$:\sqrt{KS^2+BK^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$$

א. הזווית שבין הפאה הצדדית ABS ובין הבסיס היא הזווית SKO

(הזווית בין שני האנכים לישר החיתוך BC של מישורים אלה).

SO - הוא גובהה של הפירמידה. במשולש ישר זווית KOS:

$KO=\frac{a}{2}$, $KS=\frac{3}{2}a$ לפי משפט פיתגורס:

$$OS=\sqrt{KS^2-OK^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=a\sqrt{2}$$

$$\cos\angle SKO=\frac{KO}{KS}=\frac{1}{3}\ \rightarrow\ \angle SKO\approx 70.53^\circ$$

ב. הזווית שבין המקצוע הצדדי SB ובין הבסיס היא הזווית SBO (הזווית שבין SB לבין היטלו BO במישור ABC).

במשולש ישר זווית BOS:

$$\sin\angle SBO = \frac{SO}{BS} = \frac{2a\sqrt{2}}{a\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \angle SBO \approx 63.43^\circ$$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

שימו לב! במשימה זו נוח לקחת ארבעה חודשים כיחידת זמן.

א. נרשום את הנתונים עבור מחשב בן שנתיים: $M_t = 3000,\ \ t = 6,\ \ q = 0.925$, עלינו למצוא את M_0.

$$M_0 = \frac{3000}{0.925^6} \approx 4790 \quad \leftarrow \quad 3000 = M_0 \cdot 0.925^6$$

מחירו של מחשב חדש הוא כ- 4,790 ש"ח.

ב. כאשר ערך המחשב הוא חצי ממחירו המקורי, אלה הם הנתונים: $q = 0.925,\ M_t = 0.5M_0$. עלינו למצוא את t.

$$0.5M_0 = M_0 \cdot 0.925^t$$
$$0.925^t = 0.5$$
$$t = \log_{0.925} 0.5 = \frac{\log 0.5}{\log 0.925} \approx 8.9$$

כלומר, **ערך המחשב יורד לחצי ממחירו המקורי בתוך כתשע יחידות זמן של ארבעה חודשים או בתוך שלוש שנים**.

פתרון לשאלה 4

כדי לפתור משימה זו יש לבצע שלבים רבים שאינם כתובים כסעיפים בשאלה. חלק חשוב בפתרון המשימה הוא תכנון.

תכנון אפשרי:

(1) נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

(2) נבדוק האם הפונקציה היא פונקציה מחזורית ונמצא את המחזור היסודי שלה

(3) נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה ותחומי העלייה והירידה

(4) נמצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם הצירים

(5) נשרטט את הסקיצה של גרף הפונקציה.

(1) תחום הפונקציה מוגדרת עבור כל ערך של x כי מכנה השבר לא יכול להיות שווה ל-0.

(2) הפונקציה היא פונקציה מחזורית. המחזור היסודי שלה הוא 2π:

$$f(x+2\pi)=\frac{2\cos(x+2\pi)}{2-\sin(x+2\pi)}=\frac{2\cos x}{2-\sin x}=f(x)$$

מספיק לחקור את הפונקציה בתחום שגודלו 2π, ניקח את התחום $-\pi \le x \le \pi$.

(3) למציאת נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, נמצא נקודות אפס של פונקציה נגזרת של הפונקציה:

$$f'(x)=\frac{(2\cos x)'(2-\sin x)-2\cos x(2-\sin x)'}{(2-\sin x)^2}=\frac{-2\sin x(2-\sin x)-2\cos x\cdot(-\cos x)}{(2-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-4\sin x+2\cos^2 x+2\sin^2 x}{(2-\sin x)^2}=\frac{2-4\sin x}{((2-\sin x)^2}$$

$f'(x)=0$ כאשר $\sin x=0.5$

בתחום $-\pi \le x \le \pi$ אלה נקודות $x = \frac{\pi}{6},\ x = \frac{5\pi}{6}$

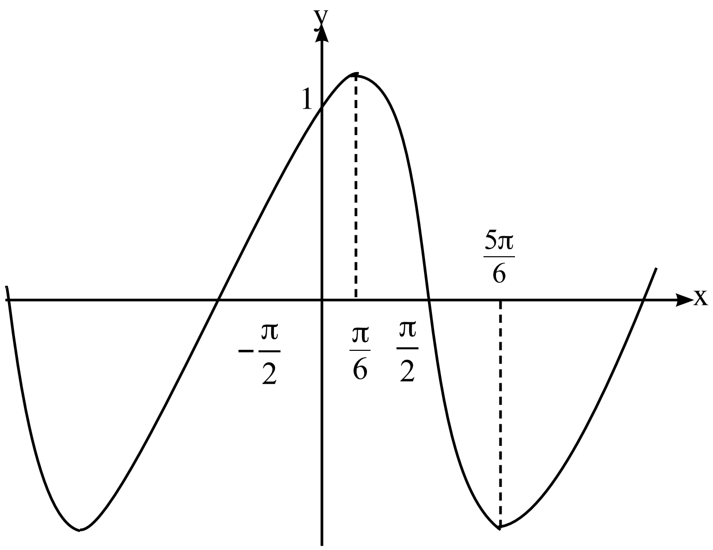
x	$-\pi \le x < \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} < x \le \pi$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	עולה	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	יורדת	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	עולה
		מקסימום		מינימום	

(4) נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y: $f(0) = 1$.

נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x:

$$y = f(x) = \frac{2\cos x}{2 - \sin x} = 0 \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$$

(5)



פתרון לשאלה 5

א. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $x > 0$.

$$F'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' - 1 = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

הוכחנו כי $F'(x) = f(x)$. כלומר, הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$ בתחום ההגדרה שלה.

ב. אם הפונקציה $G(x)$ היא גם פונקציה קדומה של הפונקציה $f(x)$, אז היא שונה מהפונקציה הקדומה $F(x)$ במספר קבוע: $G(x) = F(x) + C = x\ln x - x + C$

נתון כי $G(e) = 2$: $G(e) = e\ln e - e + C = C = 2$

התקבלה הפונקציה $G(x) = x\ln x - x + 2$

ג. $$f'(x) = \frac{1}{x},\ f'(1) = 1, f(1) = 0$$

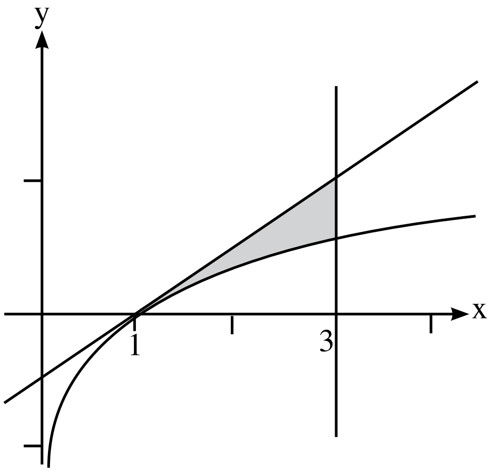
משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 1$: $y=x-1$

ד.

$$S = \int_1^3 (x - 1 - f(x))dx = \int_1^3 (x - 1 - \ln x)dx =$$

$$= (\frac{x^2}{2} - x - F(x)) \Big|_1^3 = (\frac{x^2}{2} - x - (x\ln x - x))\Big|_1^3 =$$

$$= (\frac{x^2}{2} - x\ln x) \Big|_1^3 = (\frac{9}{2} - 3\ln 3) - \frac{1}{2} = 4 - 3\ln 3 \approx 0.704$$



השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק לה בנקודה $x = 1$ והישר $x=3$ הוא $4 - 3\ln 3 \approx 0.7$

פתרון מבחן מס' 24

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. נמצא את היחס בין שני איברים סמוכים בסדרה b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}+4}{a_n+4}=\frac{0.5a_n+2}{a_n+4}=\frac{0.5(a_n+4)}{a_n+4}=0.5$$

היחס הוא מספר קבוע $q = 0.5$, $|q| < 1$

כלומר, סדרה b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת.

ב. (1) נשתמש בנוסחת הסכום של האיברים הראשונים של סדרה הנדסית. $S_n=b_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

קודם נמצא $b_1 = a_1 + 4 = 2$

$$S_4=2\cdot\frac{0.5^4-1}{0.5-1}=3.75$$

הסכום של ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא 3.75

(2) הסדרה a_n אינה סדרה הנדסית, אז אי אפשר להשתמש בנוסחת סכום האיברים הראשונים של סדרה הנדסית. אבל אפשר להשתמש בנתון $b_n = a_n + 4$ ובתוצאה של הסעיף הקודם:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (b_1 - 4) + (b_2 - 4) + (b_3 - 4) + (b_4 - 4) = S_4 - 16 = 3.75-16 = -12.25$$

יש אפשרות נוספת למצוא את הסכום של ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה a_n: מחשבים את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה a_n ומחברים אותם:

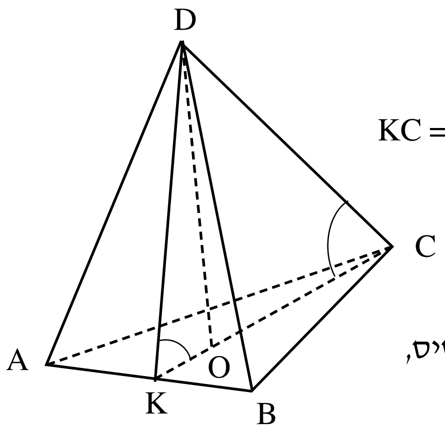
$$a_1 = -2,\quad a_2 = 0.5a_1 - 2 = -3,\quad a_3 = 0.5a_2 - 2 = -3.5,\quad a_4 = 0.5a_3 - 2 = -3.75$$

הסכום של ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה a_n הוא -12.25

פתרון לשאלה 2

לא נוח לפתור משימה זו בעזרת הנתונים. נוכל לענות על כל השאלות על הפירמידה, אם נדע את אורך צלע הבסיס של הפירמידה. במקרים כאלה יש לסמן את אורך צלע הבסיס, להביע אותו באמצעות הנתון ולמצוא את אורך צלע הבסיס כפתרון המשוואה. לאחר מכן נוכל לענות על כל השאלות.

נסמן ב-a את אורך צלע הבסיס של הפירמידה. K - אמצע הקטע AB, CK הוא תיכון וגובה במשולש שווה צלעות ACB.



לפי משפט פיתגורס במשולש KCB :

$$KC = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

שטח הבסיס: $\frac{1}{2}AB \cdot CK = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

לפי הנתון, שטח המעטפת של הפירמידה גדול פי שניים משטח הבסיס,
אז שטח מעטפת הוא $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$, מכאן

שטחה של כל פאה צדדית הוא $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

לכן,

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot DK = \frac{1}{2}a \cdot DK = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \rightarrow DK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

א. הזווית שבין הפאה הצדדית DAB ובין הבסיס היא הזווית DKO (הזווית בין שני האנכים לישר החיתוך BA של מישורים אלה).

SO - גובה של הפירמידה.

במשולש ישר זווית KOD: $OK = \frac{1}{3}KC = \frac{a\sqrt{3}}{6}, KD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\cos\angle DKO = \frac{KO}{KD} = \frac{1}{2} \rightarrow \angle DKO = 60°$$

לפי משפט פיתגורס: $OD = \sqrt{KD^2 - OK^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{9} - \frac{3a^2}{36}} = \frac{a}{2}$

ב. הזווית שבין המקצוע הצדדי CD ובין הבסיס היא הזווית DCO (הזווית שבין CD לבין היטלו CO במישור ABC).

במשולש ישר זווית DOC: $OC = \frac{2}{3}CK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, OD = \frac{a}{2}$

$$\tan\angle DCO = \frac{DO}{OC} = \frac{a}{2} : \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \angle DCO \approx 40.89^\circ$$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. נכתוב את הנתונים עבור חמש שנים: $t = 5$, $M_t = 1.2M_0$

$$q = \sqrt[5]{1.2} \approx 1.037 \quad \leftarrow \quad q^5 = 1.2 \quad \leftarrow \quad 1.2M_0 = M_0 q^5$$

מספר הסטודנטים במדינה עולה ב-3.7% בכל שנת לימודים.

ב. בסעיף זה נוח לקחת $M_0 = 32{,}400$ בשנת הלימודים 2006 ו-M_t מספר הסטודנטים בשנת הלימודים 2014:

$M_0 = 32{,}400, t = 8, q = 1.037$, עלינו למצוא את M_t

$$M_t = 32{,}400 \cdot 1{,}037^8 \approx 43{,}330$$

בשנת הלימודים 2014 יהיו במדינה כ-43,330 סטודנטים.

פתרון לשאלה 4

א. בנקודה שגרף הפונקציה $f(x)$ משיק לישר $y = 1$ שיפועה של הפונקציה וערך הנגזרת שלה הוא אפס.

נמצא את נגזרת הפונקציה $f(x)$ לפי נוסחת הנגזרת של פונקצית מנה:

$$f'(x) = \frac{\cos x(a - \sin x) - \sin x(-\cos x)}{(a - \sin x)^2} = \frac{a\cos x}{(a - \sin x)^2}$$

$f'(x)=0$ כאשר $\cos x = 0$. בתחום $0 \le x \le \pi$ זאת הנקודה $x=\frac{\pi}{2}$

לפי הנתון הערך של y בנקודת ההשקה הוא 1: $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{a-\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a-1} = 1 \to a=2$

ב. פונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{2-\sin x}$ מוגדרת לכל ערכי ה-x כי הביטוי במכנה לא שווה ל-0.

למציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה נשתמש בנגזרת של הפונקציה שמצאנו בסעיף א:

$$f'(x) = \frac{2\cos x}{(2-\sin x)^2} = 0 \to \cos x = 0$$

בתחום $0 \le x \le \pi$ זאת הנקודה $x=\frac{\pi}{2}$ בלבד.

הנגזרת מוגדרת לכל ערכי ה-x ושווה לאפס בנקודה $x=\frac{\pi}{2}$:

$\frac{\pi}{2} < x \le \pi$	$\frac{\pi}{2}$	$0 \le x < \frac{\pi}{2}$	x
-	0	+	$f'(x)$
יורדת	1	עולה	$f(x)$
	מקסימום		

הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ויורדת בתחום $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$.

ג. כדי למצוא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y:

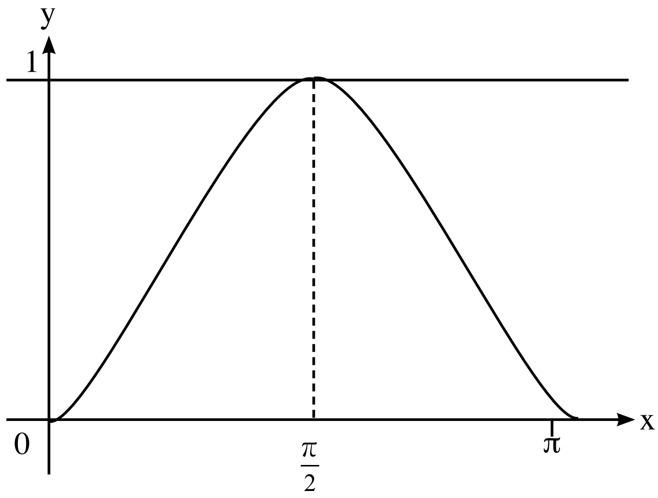
נציב $x=0$ לפונקציה $f(x)$: $y=0$

כדי למצוא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x: $f(x)=\frac{\sin x}{2-\sin x}=0$

בתחום $0 \le x \le \pi$ אלה הנקודות $x=0, x=\pi$.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך ראשית הצירים וחותך את ציר ה-x בנקודה $x=\pi$.

ד.



פתרון לשאלה 5

א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל ערכי ה-x, כי מכנה השבר לא יכול להיות שווה לאפס.

ב. למציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה נמצא את הנגזרת שלה לפי נוסחת הנגזרת של פונקציית מנה:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

x	$x < 1$	1	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	עולה	$\frac{e}{2}$	עולה
מסקנה		אין קיצון	

כלומר, הפונקציה $f(x)$ עולה בכל תחום הגדרתה. לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון.

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y: כאשר $x = 0$, $f(x) = 1$.

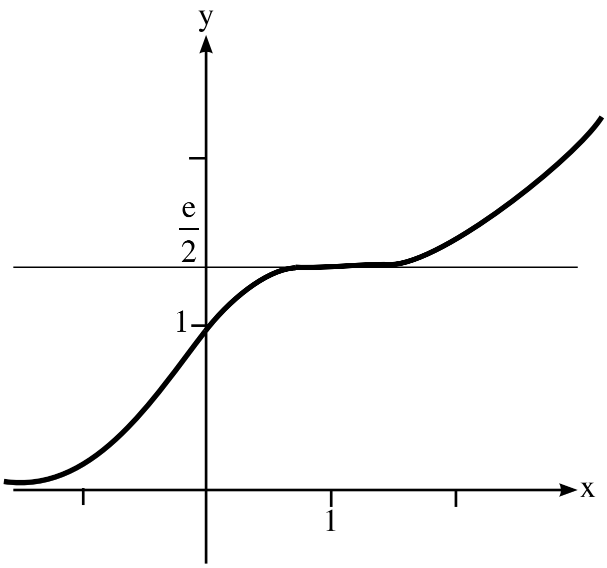
נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y היא $(0 , 1)$.

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x:

מכוון ש- $y = f(x) = \frac{e^x}{x^2+1} > 0$, גרף הפונקציה $f(x)$ לא חותך את ציר ה-x. לכל ערך של x, ערך הפונקציה $f(x)$ הוא חיובי.

ה. אם המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ מקביל לציר ה-x, אז ערך הנגזרת בנקודת ההשקה הוא 0:

עבור $x = 1$, $f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = 0$



משוואת המשיק בנקודה $x = 1$:

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$ או $y = \frac{e}{2}$.

משוואת המשיק המקביל לציר ה-x היא $y = \frac{e}{2}$.

פתרון מבחן מס׳ 25

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. נמצא את היחס בין איברים סמוכים בסדרה b_n:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{3(n+1)}}{a_{3n}}=\frac{a_{3n+3}}{a_{3n}}=q^3=-0.125$$

היחס בין איברים סמוכים בסדרה b_n הוא מספר קבוע -0.125. הערך המוחלט של היחס קטן מ- 1. זאת אומרת כי סדרה b_n היא סדרה הנדסית אין-סופית יורדת. מנת הסדרה b_n היא -0.125.

ב. יש למצוא יחס בין סכום הסדרה a_n לסכום הסדרה b_n:

שימו לב, איננו יכולים למצוא את הסכומים של סדרות אלו, כי אין נתונים למציאת האיברים הראשונים שלהן, אך אפשר למצוא את היחס בין הסכומים:

$$\frac{S_a}{S_b}=\frac{a_1}{1-(-0.5)}:\frac{a_1\cdot(-0.5)^2}{1-(-0.125)}=\frac{a_1}{1.5}:\frac{0.25a_1}{1.125}=\frac{1.125}{1.5\cdot 0.25}=3$$

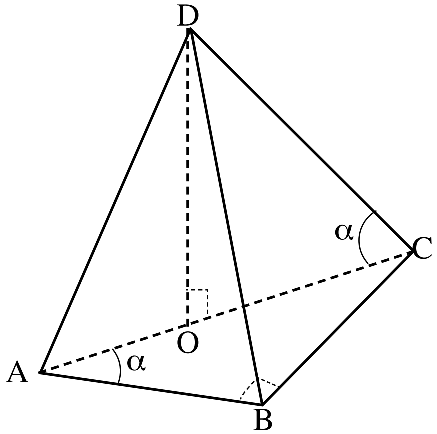
סכום הסדרה a_n גדולה מסכום הסדרה b_n פי 3.

פתרון לשאלה 2

א. נסמן ב-α את גודל הזווית BAC.

במשולש ישר זווית ABC :

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} \rightarrow BC = AC\cdot\sin\alpha = 20\sin\alpha;\ \cos\alpha = \frac{AB}{AC} \rightarrow AB = AC\cdot\sin\alpha = 20\cos\alpha$$



בפירמידה ישרה עקב הגובה הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס. במשולש ישר זווית ABC מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר AC (נקודה O). O - אמצע הקטע AC,

DO הוא תיכון וגובה במשולש שווה שוקיים ACD.

הזווית שבין המקצוע הצדדי CD ובין הבסיס של הפירמידה היא זווית DCO.

לפי הנתון: $\angle DCO = \angle BAC = \alpha$

במשולש ישר זווית DOC:

$$\tan\alpha = \frac{DO}{OC} \rightarrow h = DO = OC\cdot\tan\alpha = 10\tan\alpha$$

נפח הפירמידה:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 200\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot 10\tan\alpha = \frac{2000}{3}\sin^2\alpha = 500 \rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \alpha = 60^\circ$$

$$BC = 20\sin\alpha = 10\sqrt{3},\ AB = 20\cos\alpha = 10,\ h = DO = 10\tan\alpha = 10\sqrt{3}$$

גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי ובין הבסיס הוא 60°

ב. משולש ADC הוא משולש שווה צלעות, כלומר AD=DC=AC=20 ס"מ.

שטח המעטפה של הפירמידה הוא סכום שטחי שלושת המשולשים שהם הפאות הצדדיות.

שטח המשולש ADC: $\frac{1}{2}AC\cdot DO = 100\sqrt{3}$

גובה ותיכון במשולש שווה שוקיים ABD: $\sqrt{AD^2 - (\frac{AB}{2})^2} = \sqrt{400-25} = \sqrt{375} = 5\sqrt{15}$

שטח המשולש ADB: $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\sqrt{15} = 25\sqrt{15}$.

גובה ותיכון במשולש שווה שוקיים CBD: $\sqrt{BD^2 - (\frac{CB}{2})^2} = \sqrt{400 - 75} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$

שטח המשולש CDB: $\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{13} = 25\sqrt{39}$.

שטח המעטפה של הפירמידה: $100\sqrt{3} + 25\sqrt{15} + 25\sqrt{39} \approx 426.15$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. נרשום את הנתונים מ-01.01 עד ב01.06: $t = 5, M_t = 648, M_0 = 540$, נמצא את q.

$$648 = 540 \cdot q^5 \quad \rightarrow \quad q^5 = \frac{648}{540} = 1.2 \quad \rightarrow \quad q = \sqrt[5]{1.2} \approx 1.037$$

כעבור שנה אלה הם הנתונים: $t = 12, q = 1.037$

$$M_t = M_0 \cdot 1.037^{12} \approx M_0 \cdot 1.546$$

כעבור שנה כמות תרנגולי ההודו בחווה תגדל ב- 54.6%.

ב. כאשר כמות תרנגולי ההודו בחווה תגיע ל-1,000 הנתונים הם: $M_t = 1{,}000, M_0 = 540, q = 1.037$

$$1000 = 540 \cdot 1.037^t \quad \rightarrow \quad 1.037^t = \frac{1{,}000}{540} \approx 1.852$$
$$t = \log_{1.037} 1.852 \approx 16.9$$

כלומר, כמות תרנגולי ההודו בחווה תגיע ל-1,000 בעוד פחות מ-17 חודשים או בחודש מאי בשנה הבאה.

פתרון לשאלה 4

א. בגרף רואים כי:

(1) $f(0)=2$ אז $f(0)=a\cos0-b\sin0=a=2$, מכאן $a=2$

(2) $\frac{\pi}{8}$ היא נקודת מקסימום של הפונקציה $f(x)$, לכן $f'(\frac{\pi}{8})=0$.

$$f'(x)=-4\sin 2x-2b\cos 2x \rightarrow f'(\frac{\pi}{8})=-4\sin\frac{\pi}{4}-2b\cos\frac{\pi}{4}=$$
$$=-2\sqrt{2}-b\sqrt{2}=-\sqrt{2(2+b)}=0 \rightarrow b=-2$$

קיבלנו את הפונקציה $f(x)=2\cos2x+2\sin2x$.

ב. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x:

$$f(x)=2\cos 2x+2\sin 2x=0 \ \ /:2\cos 2x \rightarrow \tan 2x=-1$$

אז בתחום הנתון

$$2x=\frac{3\pi}{4} \text{ או } 2x=\frac{7\pi}{4} \rightarrow x=\frac{3\pi}{8} \text{ או } x=\frac{7\pi}{8}$$

גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $0\le x\le\pi$ חותך את ציר ה-x בשתי הנקודות $x=\frac{7\pi}{8}, x=\frac{3\pi}{8}$.

ג.
$$S=-\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}} f(x)\,dx=-\int_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}}(2\cos 2x+2\sin 2x)\,dx=-((\sin 2x-\cos 2x)\Big|_{\frac{3\pi}{8}}^{\frac{7\pi}{8}})=$$
$$=-(\sin\frac{7\pi}{4}-\cos\frac{7\pi}{4})+(\sin\frac{3\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4})=\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}\approx 2.83$$

השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $0\le x\le\pi$ הוא $2\sqrt{2}\approx 2.83$.

פתרון לשאלה 5

א. גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$ חותך את ציר ה-x בנקודה $x = 1$, משמע כי $f(1) = 0$:

$$f(1) = a - b = 0 \rightarrow a = b$$

ולכן אפשר לכתוב $f(x)=\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}$.

גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}$ משיק לישר $y=1$, משמע כי בנקודת ההשקה: $f'(x) = 0$, $f(x) = 1$.

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}+\frac{2a}{x^3}=\frac{-ax+2a}{x^3}=\frac{-a(x-2)}{x^3}=0$ זאת אומרת שבנקודת ההשקה $x = 2$.

$$f(2)=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}=1 \rightarrow a=b=4$$

התקבלה הפונקציה: $f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}$

ב. בסעיף הקודם מצאנו כי $f'(x)=\frac{-4(x-2)}{x^3}$ ו- $f'(x) - 0$ כאשר $x = 2$.

x	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	עולה	1	יורדת
מסקנה		מקסימום	

הפונקציה עולה בתחום $0 < x < 2$, יורדת בתחום $x > 2$. בנקודה $x = 2$ לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום.

ג. השטח המבוקש הוא שטח המלבן פחות השטח שנמצא מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$ מ-1 עד 2.

$$S=2-\int_1^2 f(x)dx=2-\int_1^2\left(\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx=2-\left(4\ln x+\frac{4}{x}\right)\Big|_1^2=2-(4\ln 2+2-4)=4-4\ln 2\approx 1.23$$

השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק $y=1$ ושני הצירים הוא $4-4\ln 2\approx 1.23$.

פתרון מבחן מס' 26

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. מהנתון $a_n + b_n = 5$ נובע כי $b_n = 5 - a_n$.

נמצא:

$$b_{n+1} - b_n = (5-a_{n+1}) - (5 - a_n) = -(a_{n+1} - a_n) = 3$$

ההפרש בין איברים סמוכים בסדרה b_n הוא מספר קבוע חיובי. מכאן שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית עולה.

ב. (1) יש שתי דרכים שונות למצוא את הסכום של ששת האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

דרך 1: נתון: סכום ששת האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא 15.

$$S_6 = \frac{6(2b_1 + 3\cdot 5)}{2} = 15$$

$$b_1 = -5$$

$$a_1 = 5 - (-5) = 10$$

סכום ששת האיברים הראשונים של הסדרה a_n: $S_6 = \frac{6(2\cdot 10 - 3\cdot 5)}{2} = 15$

דרך 2:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (5-b_1) + (5-b_2) + \ldots + (5-b_6) = 30-(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) =$$
$$= 30-15 = 15$$

סכום ששת האיברים הראשונים של הסדרה a_n הוא 15.

(2)

$$b_7 = b_1 + 6 \cdot 3 = -5 + 18 = 13$$

$$a_8 = a_1 + 7 \cdot (-3) = 10 - 21 = -11$$

$$b_7 + a_8 = 2$$

פתרון לשאלה 2

א. נתון כי בסיס התיבה הוא מלבן, היחס בין צלעות המלבן $AD:AB=1:2$.

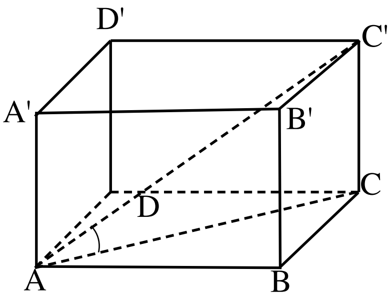
נסמן $AD = BC = a$ מכאן $AB = DC = 2a$.

שטח הבסיס: $a \cdot 2a = 2a^2 = S \rightarrow a = \sqrt{\frac{S}{2}}$.

הפאה הצדדית $BCC'B$ היא ריבוע, כלומר $BB' = CC' = BC = a = \sqrt{\frac{S}{2}}$

שטח הפנים של התיבה הוא סכום של שטח המעטפה ושטחי הבסיס:

$2 \cdot (AB + BC) \cdot BB' + 2AB \cdot BC = 6a^2 + 2S = 3S + 2S = 5S$



ב. הזווית בין אלכסון התיבה AC' ובין בסיס התיבה היא זווית בין AC' לבין ההיטל שלו AC במישור $ABCD$, והיא זווית CAC'.

במשולש ישר זווית ABC: $BC = a, AB = 2a$

לפי משפט פיתגורס: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$

במשולש ישר זווית ACC':

$$\tan\angle CAC' = \frac{CC'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow \angle CAC' \approx 24.09°$$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. (1) נרשום את הנתונים עבור השקעה בבנק א לעשר שנים: $q = 1.03$, $t = 10$

$$M_t = M_0 \cdot 1.03^{10} \approx 1.344M_0$$

כלומר, **השקעה של עשר שנים בבנק א תיתן רווח של כ-34.4%.**

(2) נכתוב את הנתון עבור רווח של 30%: $q = 1.03$, $M_t = 1.3M_0$, עלינו למצוא את t.

$$1.3M_0 = M_0 \cdot 1.03^t \rightarrow 1.3 = 1.03^t \rightarrow t = \log_{1.03} 1.3 = \frac{\log 1.3}{\log 1.03} \approx 8.88$$

השקעה בבנק א תקנה רווח של 30% בתוך תשע שנים.

ב. (1) נרשום את הנתונים עבור השקעה בבנק ב לעשר שנים: $t = 10, M_t = 1.3M_0$ עלינו למצוא את q.

$$q = \sqrt[10]{1.3} \approx 1.0266 \quad \leftarrow \quad q^{10} = 1.3 \quad \leftarrow \quad 1.3M_0 = M_0 \cdot q^{10}$$

כלומר, **הריבית השנתית בבנק ב היא כ- 2.66%**.

(2) מכיוון ש-3% גדולים מ-2.66%, **בבנק א הריבית השנתית גבוהה יותר**.

פתרון לשאלה 4

א. כדי למצוא תחומי עליה וירידה של הפונקציה f(x) נמצא נקודות אפס של פונקצית הנגזרת:

$$f'(x) = \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0 \ \ /:\cos\frac{x}{2} \rightarrow \tan\frac{x}{2} = 1.$$

אם $-2\pi \le x \le 2\pi$ אז $-\pi \le \frac{x}{2} \le \pi$ בתחום הנתון

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \ \text{או} \ \frac{x}{2} = \frac{-3\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \ \text{או} \ x = \frac{-3\pi}{2}$$

טבלת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה f(x) בתחום $-2\pi \le x \le 2\pi$:

x	$-2\pi \le x < -\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x \le 2\pi$
f '(x)	+	0	-	0	+
f(x)	עולה		יורדת		עולה
		מקסימום		מינימום	

הפונקציה f(x) עולה בתחומים: $-2\pi \le x < -\frac{3\pi}{2}$ ו- $\frac{\pi}{2} < x \le 2\pi$,

הפונקציה f(x) יורדת בתחום $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

ב. $f(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f'(x)=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$.

$$f(x)=\int(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})dx=-2\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+C$$

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ עובר דרך ראשית הצירים, כלומר $f(0)=0$:

$$f(0)=-2\sin 0-2\cos 0+C=-2+C=0,\quad C=2$$

נציב בפונקציה $f(x)$: $f(x)=-2\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}+2$

ג. שיעורי נקודות הקצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$:

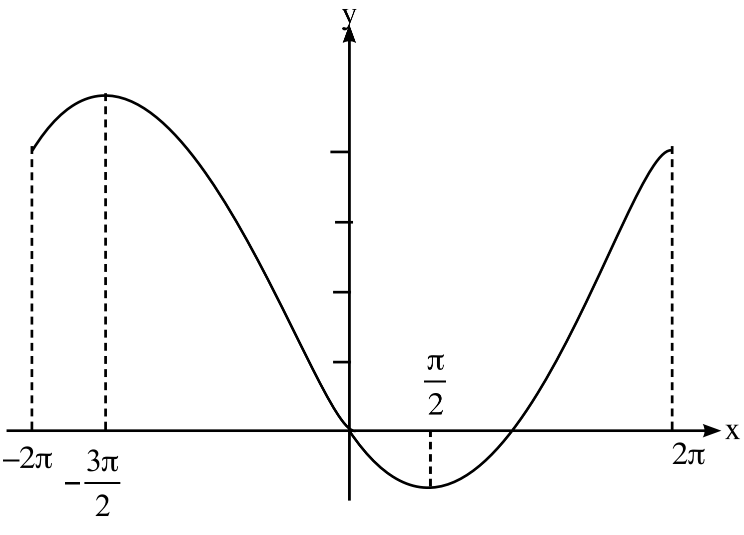
$$f(-2\pi)=f(2\pi)=4$$

שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-2\pi\le x\le 2\pi$:

$$f(-\frac{3\pi}{2})=-2\cos(-\frac{3\pi}{4})-2\sin(-\frac{3\pi}{4})+2=2+2\sqrt{2}\approx 4.83$$

$$f(\frac{\pi}{2})=-2\cos(\frac{\pi}{4})-2\sin(\frac{\pi}{4})+2=2-2\sqrt{2}\approx -0.83$$

ד.



פתרון לשאלה 5

א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל ערכי ה-x.

למציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה נמצא את הנקודות שבהן פונקציית הנגזרת שווה לאפס:

$$f'(x) = 2e^{x+1} - 2e^{2x} = 2e^{x}(e^{1} - e^{x}) = 0 \rightarrow x = 1$$

$x > 1$	1	$x < 1$	x
-	0	+	$f'(x)$
יורדת	e^2	עולה	$f(x)$
	מקסימום		מסקנה

כלומר, הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x < 1$.

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 1$

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום $(1 , e^2)$.

נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$

עם ציר ה-y: כאשר $x = 0$,

$f(x) = 2e - 1 \approx 4.42$.

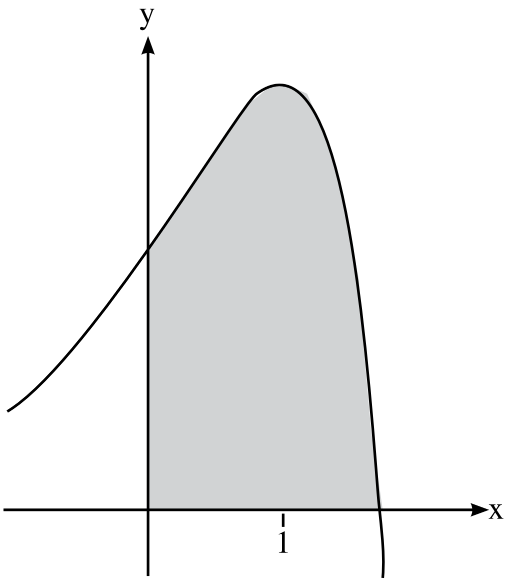
נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y היא

$(0, 2e\text{-}1)$

שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר

ה-x:

$$y = f(x) = 2e^{x+1} - e^{2x} = e^{x+1}(2 - e^{x-1}) = 0$$
$$\rightarrow x = 1 + \ln 2 \approx 1.69$$



גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה $(1+\ln2, 0)$.

בכל התחום שבו $x < 1+\ln2$ ערך הפונקציה $f(x)$ הוא מספר חיובי.

בכל התחום שבו $x > 1+\ln2$ ערך הפונקציה $f(x)$ הוא מספר שלילי.

ב. השטח המוגבל בין גרף הפונקציה לשני הצירים הוא $2e^2 - 2e + 1 \approx 10.27$

פתרון מבחן מס' 27

פתרון לשאלה 1

א. נשתמש בנוסחת הסכום של איברים ראשונים בסדרה חשבונית: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$

סכום האיברים, מהאיבר ה- 11 עד האיבר ה- 20, הוא: $S_{20}\text{-}S_{10} = S_{20}\text{-}75$

נכתוב את הנתונים כמערכת משוואות:

$$\begin{cases} \frac{10(2a_1+9d))}{2} = 75 \\ \frac{20(2a_1+19d))}{2} - 75 = 275 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1+9d=15 \\ 2a_1+19d=35 \end{cases} \rightarrow 10d = 20 \rightarrow d = 2$$

נציב את $d = 2$ במשוואה הראשונה: $2a_1 + 18 = 15 \rightarrow a_1 = -1.5$

ב. הסכום של n איברי הסדרה, החל מהאיבר התשיעי, הוא ההפרש בין הסכום של $n + 8$ האיברים הראשונים של הסדרה לבין סכום שמונת האיברים הראשונים של הסדרה.

נמצא את סכום שמונת האיברים הראשונים של הסדרה: $S_8 = \frac{8(-3+2\cdot7))}{2} = 44$

נכתוב את הנתון "סכום איברי הסדרה החל מאיבר התשיעי הוא 306" כמשוואה:

$$S_{n+8} - S_8 = \frac{(n+8)(-3+2(n+7))}{2} - 44 = 306$$

$$(n + 8)\ (2n + 11) = 700$$

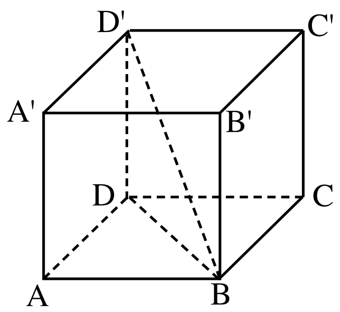
למשוואה הזו יש פתרון אחד טבעי $n = 12$

כדי לקבל את הסכום 306 יש לחבר 12 מאיברי הסדרה החל מהאיבר התשיעי.

פתרון לשאלה 2

א. נסמן את אורך הצלע של הריבוע בבסיס התיבה ב-x. מכאן אורך אלכסון הריבוע BD הוא $x\sqrt{2}$.

הזווית בין אלכסון התיבה BD' ובין בסיס התיבה היא הזווית DBD' (זווית בין BD' לבין ההיטל שלו BD במישור ABCD).



נתון: $\angle DBD' = 30°$. במשולש ישר זווית DBD'

$$\cos\angle DBD' = \frac{BD}{BD'} = \frac{x\sqrt{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow x = a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$BD = x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

לפי משפט פיתגורס: $DD' = h = \sqrt{BD'^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}$

(1) נפח התיבה: $V = x^2 h = \frac{3}{8}a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{16}a^3$.

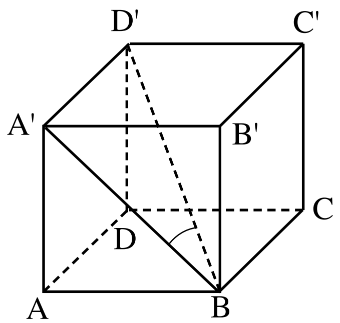
(2) שטח הפנים של התיבה הוא סכום של שטח המעטפה ושטחי הבסיס:

$$4x \cdot \frac{a}{2} + 2x^2 = 2a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{8} = a^2(\sqrt{1.5} + \frac{3}{4}) \approx 1.97a^2$$

ב. הזווית בין אלכסון התיבה BD' ובין הפאה הצדדית ABB'A' היא הזווית A'BD' (זווית בין BD' לבין ההיטל שלו A'B במישור AA'B'B).

במשולש ישר זווית A'BD' $BD' = a,\ A'D' = x = a\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ אז

$$\sin\angle A'BD' = \frac{A'D'}{BD'} = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} : a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \rightarrow \angle A'BD' \approx 22.02°$$



פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. נמצא בעוד כמה שנים סכום הכסף 90,000 ש"ח מגיע ל-100,000 ש"ח:

הנתונים המתאימים הם: $M_0 = 90{,}000,\ M_t = 100{,}000,\ q = 1.055$. עלינו למצוא את t.

$$100{,}000 = 90{,}000 \cdot 1.055^t$$
$$1.111 = 1.055^t$$
$$t = \log_{1.055} 1.111 = \frac{\log 1.111}{\log 1.055} \approx 1.97$$

כלומר, **במשך שנתיים האדם יקבל רווח שנתי של 5.5% ובמשך ארבע שנים הוא יקבל רווח שנתי של 6.5%**.

ב. תחילה נמצא מה סכום הכסף שאדם יקבל עבור שנתיים ברווח שנתי של 5.5%:

הנתונים המתאימים הם $M_0 = 90{,}000,\ t = 2,\ q = 1.055$, עלינו למצוא את M_t.

$$M_t = 90{,}000 \cdot 1.055^2 = 100{,}172.25$$

בתקופה של ארבע שנים הסכום ההתחלתי M_0 הוא 100,172.25 ש"ח.

נרשום את הנתונים עבור ארבע שנים ברווח שנתי 6.5%: $t = 4,\ M_0 = 100{,}172.25,\ q = 1.065$

$$M_t = 100{,}172.25 \cdot 1.065^4 \approx 128{,}870$$

הרווח עבור תקופה של שש שנים: $128{,}870 - 90{,}000 = 38{,}870$

עבור תקופה של שש שנים האדם מקבל רווח של כ-38,870 ש"ח.

פתרון לשאלה 4

א. לכל ערך של x מתקיים:

$$f(x+4\pi)=2\cos\frac{x+4\pi}{2}-\frac{\sin 2(x+4\pi)}{2}=$$
$$=2\cos(\frac{x}{2}+2\pi)-\frac{\sin(2x+8\pi)}{2}=2\cos\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}=f(x)$$

כלומר, פונקציה $f(x)$ היא פונקציה מחזורית ו-4π הוא מחזור שלה.

ב. נכתוב את משוואת המשיק בנקודה $x=-\pi$:

$$f'(x)=-\sin\frac{x}{2}-\cos 2x \rightarrow f'(-\pi)=-\sin\frac{-\pi}{2}-\cos(-2\pi)=1-1=0$$
$$f(-\pi)=2\cos\frac{-\pi}{2}-\frac{\sin(-2\pi)}{2}=0$$

משוואת המשיק בנקודה $x=-\pi$ היא $y=0$ וזה ציר ה-x.

בנקודה $x=\pi$: $f(\pi)=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(2\pi)}{2}=0$

הנקודה $(\pi\ ,0)$ היא נקודה משותפת של גרף הפונקציה $f(x)$ ושל ציר ה-X, אבל היא לא נקודת ההשקה כי $f'(\pi)=-\sin\frac{\pi}{2}-\cos(2\pi)=-1-1=-2\neq 0$.

ג.

$$S=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}(2\cos\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{2})=$$
$$=(4\sin\frac{x}{2}+\frac{\cos 2x}{4})\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=(4\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\cos 2\pi}{4})-(4\sin\frac{-\pi}{2}+\frac{\cos(-2\pi)}{4})=8$$

השטח המוגבל בגרף הפונקציה $f(x)$ ובציר ה-X בתחום $-\pi\leq x\leq\pi$ הוא 8.

פתרון לשאלה 5

א. בגרף I ניתן לראות שהפונקציה המתאימה לו עולה בתחום $0 < x < 1$ ויורדת בתחום $x > 1$.

בגרף II ניתן לראות שהפונקציה המתאימה לו חיובית בתחום $0 < x < 1$ ושלילית בתחום $x > 1$.

כלומר, גרף I מתאים לפונקציה $f(x)$ וגרף II מתאים לפונקציה $f'(x)$.

ב. בגרף II אפשר לראות שהנקודה $x = 1$ היא נקודת האפס של פונקציה $f'(x)$. נמצא את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ לפי נוסחת הנגזרת של פונקציית מנה:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (a + \ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1 - a - \ln x}{x^2}$$

$$f'(1) = \frac{1 - a - \ln 1}{1} = 1 - a = 0 \rightarrow a = 1$$

נקבל: $a = 1,\ f(x) = \frac{1 + \ln x}{x},\ f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

ג. למציאת תחומי העלייה והירידה ונקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$ נמצא את פונקציית הנגזרת שלה:

$$(f'(x))' = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 + \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3} = 0 \ \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = e^{0.5}$$

x	$0 < x < e^{0.5}$	$e^{0.5}$	$x>e^{0.5}$
$(f'(x))'$	-	0	+
$f'(x)$	יורדת	$\frac{-1}{2e}$	עולה
מסקנה		מינימום	

הפונקציה $f'(x)$ יורדת בתחום $0 < x < e^{0.5}$

הפונקציה $f'(x)$ עולה בתחום $x > e^{0.5}$

הנקודה $(e^{0.5}, -\frac{1}{2e})$ היא נקודת המינימום של הפונקציה $f'(x)$.

ד. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f'(x)$.

$$\int_{0.5}^{1} f'(x)dx = f(x)\Big|_{0.5}^{1} = \frac{1+\ln x}{x}\Bigg|_{0.5}^{1} = 1 - \frac{1+\ln 0.5}{0.5} = 2\ln 2 - 1 \approx 0.386.$$

$$\int_{0.5}^{1} f'(x)dx = 2\ln 2 - 1 \approx 0.386.$$

פתרון מבחן מס' 28

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. בעזרת נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית ניתן לכתוב את הנתונים כמערכת משוואות של שני משתנים a_1 ו- d:

$$\begin{cases} \dfrac{a_1+2d}{a_1+7d}=3.5 \\ (a_1+4d)(a_1+8d)=20 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \dfrac{a_1+2d}{a_1+7d}=3.5 \quad /\cdot(a_1+7d) \\ (a_1+4d)(a_1+8d)=20 \end{cases}$$

לאחר פישוט המשוואה הראשונה קיבלנו $a_1 = -9d$

לאחר שנציב את המשוואה הראשונה במשוואה השנייה נקבל: $d^2 = 4$

יש שתי אפשרויות:

(1) $d = 2 \leftarrow a_1 = -9d = -18 \quad a_4 = a_1 + 3d = -12$

יש למצוא את מספרו של איבר הסדרה השווה ל- 12:

$a_1 + d(n-1) = 12$ או $-18 + 2(n-1) = 12 \leftarrow n = 16$.

(2) $d = -2 \leftarrow a_1 = -9d = 18 \leftarrow a_4 = a_1 + 3d = 12$

יש למצוא מספרו של איבר הסדרה השווה ל- 12-:

$a_1 + d(n-1) = -12$ או $18-2(n-1) = -12 \leftarrow n = 16$

בכל אחת משתי האפשרויות מספרו של איבר הסדרה הנגדי לאיבר הרביעי הוא 16.

ב. איברי הסדרה הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית בעלת הפרש 2d המתחילה מהאיבר השני של הסדרה a_n. יש למצוא את הסכום של 17 האיברים הראשונים של הסדרה.

לפי שתי האפשרויות שקיבלנו בפתרון של סעיף א:

a. $a_1 = -18,\ a_2 = -16\ ,\ d = 2$

$$S_{17} = \frac{17\,(-32 + 2\cdot 16)}{2} = 0$$

$a_1 = 18, a_2 = 16 , d = -2$ .b

$$S_{17} = \frac{17\,(32 - 2\cdot 16)}{2} = 0$$

בכל אחת משתי האפשרויות: $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{34} = 0$

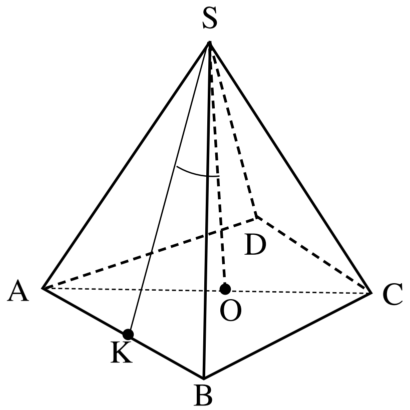
פתרון לשאלה 2

א. במשולש ישר זווית ABC: $AC = 8$ ס"מ, $\angle BAC = 45°$.

$$\sin\angle BAC = \frac{BC}{AC} \rightarrow BC = AC\cdot \sin 45° = 4\sqrt{2}$$

כלומר, אורך צלע הבסיס הוא $4\sqrt{2}$ ס"מ.

שטח המעטפה של הפירמידה הוא סכום שטחי ארבעה משולשים חופפים שהם הפאות הצדדיות.



הנקודה K היא אמצע הקטע AB.

SK הוא תיכון וגובה במשולש שווה שוקיים ASB.

שטח המעטפה של הפירמידה:

$$S = 4\cdot\frac{1}{2}AB\cdot SK = 4\cdot 2\sqrt{2}\cdot SK = 8\sqrt{2}\cdot SK = 64 \rightarrow SK = 4\sqrt{2}$$

במשולש ישר זווית SKA: $SK = 4\sqrt{2},\ AK = 4\sqrt{2}$

לפי משפט פיתגורס:

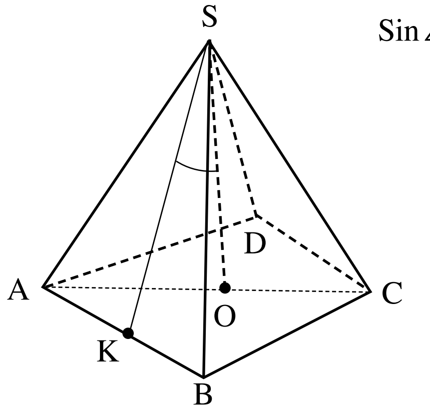
$$AS = \sqrt{AK^2 + KS^2} = \sqrt{8+32} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

ב. הקטע SO הוא גובה הפירמידה. כיוון שהפירמידה $SABCD$ היא פירמידה ישרה, הנקודה O היא אמצע האלכסון AC.

במשולש ישר זווית SOK:

$$SK = 4\sqrt{2}, OK = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$Sin\angle KSO = \frac{OK}{SK} = \frac{1}{2} \rightarrow \angle KSO = 30^\circ$$



פתרון לשאלה 3

א. נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

נרשום את הנתונים המתאימים לגודל האוכלוסייה בעיר מלפני שנתיים עד היום:

$M_0 = 34{,}600, M_t = 36{,}200, t = 2$. עלינו למצוא את q.

$$q = \sqrt{1.046} \approx 1.0227 \quad \leftarrow \quad q^2 = \frac{36{,}200}{34{,}600} \approx 1.046 \quad \leftarrow \quad 36{,}200 = 34{,}600 \cdot q^2$$

נרשום את הנתונים המתאימים לגודל האוכלוסייה מהיום עד חמש שנים מהיום:

$q = 1.0227, M_0 = 36{,}200, t = 5$. עלינו למצוא את M_t

$$M_t = 36.200 \cdot 1.0227^5 \approx 40{,}500$$

כעבור חמש שנים גודל האוכלוסייה בעיר יהיה כ- 40,500 תושבים.

ב. נרשום את הנתונים המתאימים לגודל האוכלוסייה מהיום ועד שיהיו בעיר 40,000 תושבים: $M_0 =$ $36{,}200, M_t = 40{,}000, q = 1.0227$, עלינו למצוא את t.

$$1.0227^t = \frac{40{,}000}{36{,}200} \approx 1.105 \quad \leftarrow \quad 40{,}000 = 36.200 \cdot 1.0227^t$$

$$t = \log_{1.0227} 1.105 = \frac{\log 1.105}{\log 1.0227} \approx 4.45$$

כלומר, **בעוד בערך 4.5 שנים יהיו בעיר 40,000 תושבים**.

פתרון לשאלה 4

א. בגרף רואים כי $f'(x) > 0$, כאשר $0 < x < \frac{\pi}{6}$ וכאשר $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$, $f'(x) < 0$ כאשר $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

כלומר, פונקציה $f(x)$ עולה בתחום $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ובתחום $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$, ויורדת בתחום $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

ב. המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ מקביל לציר ה-X כאשר $f'(x) = 0$.

לפי הגרף, זאת הנקודות אשר $x = \frac{5\pi}{6}$ או $x = \frac{\pi}{6}$.

ג. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f'(x) = 2\cos 2x - 1$:

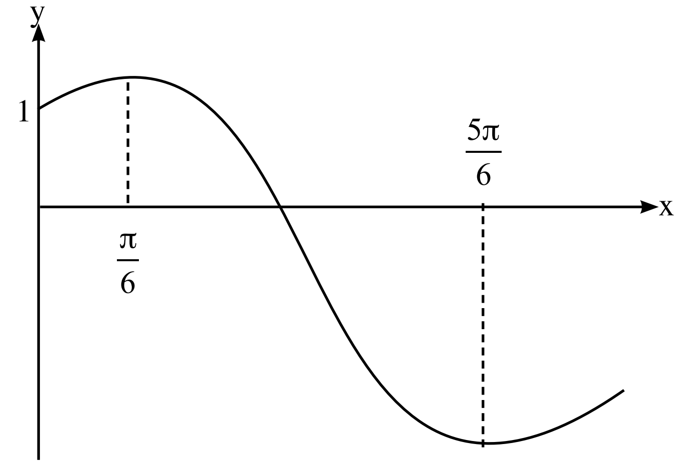
$$f(x) = \int (2\cos 2x - 1)dx = \sin 2x - x + C$$

לפי הנתון $f(0) = f'(0) = 2\cos 0 - 1 = 1$:

$$f(0) = \sin 0 - 0 + C = 1 \rightarrow C = 1$$

התקבלה הפונקציה $f(x) = \sin 2x - x + 1$

ד.



ה. שימו לב! מדובר על גרף הפונקציה $f'(x)$ ולא על גרף הפונקציה $f(x)$.

$$S = -\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} f'(x)dx = -f(x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = -(\sin 2x - x + 1)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} =$$

$$= -(\sin\frac{5\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} + 1) + (\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 1) = \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \approx 3.83$$

שטח המוגבל בגרף הנתון של פונקציה $f'(x)$ ובציר ה-x הוא $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \approx 3.83$.

פתרון לשאלה 5

א. נתון כי הנקודה $(2,4)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)$. זאת אומרת כי $f(2)=4$, $f'(2)=0$ אז

$$f'(x)=1-e^{x+a} \rightarrow f'(2)=1-e^{2+a}=0 \rightarrow e^{2+a}=1 \rightarrow 2+a=0 \rightarrow a=-2$$

$$f(2)=2-e^{2-2}+b=4 \rightarrow b=3$$

$a=-2, b=3$, מכאן, התקבלה הפונקציה $f(x)=x-e^{x-2}+3$.

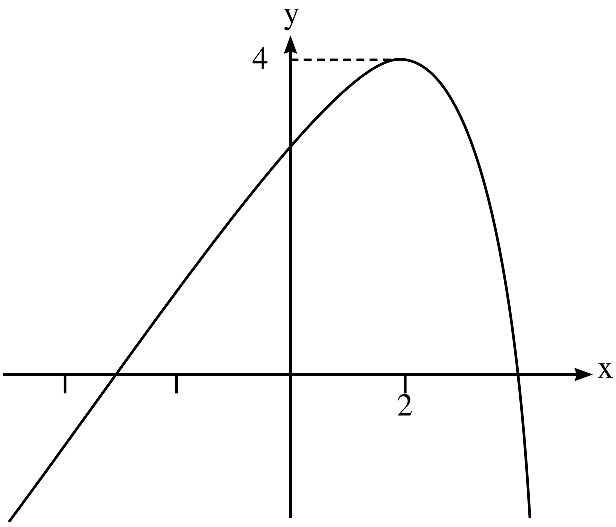
ב. $f'(x)=1-e^{x-2}=0 \rightarrow e^{x-2}=1 \rightarrow x-2=0 \rightarrow x=2$

x	x<2	2	x > 2
f '(x)	+	0	-
f(x)	עולה	4	יורדת
מסקנה		מקסימום	

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מקסימום $(2,4)$ ואין נקודות קיצון נוספות.

הפונקציה עולה בתחום $x<2$, הפונקציה יורדת בתחום $x>2$.

ג.



ד. אם לגרף הפונקציה $f(x)$ יש משיק המקביל לישר $y=x$, אז הנגזרת בנקודת ההשקה שווה לשיפוע של הישר $y = x$ שהוא 1:

$$f'(x) = 1 - e^{x-2} = 1, \qquad e^{x-2} = 0$$

אבל המשוואה אינה יכולה להתקיים כיוון שלכל ערך של x, $e^{x-2} > 0$

כלומר, לגרף הפונקציה $f(x)$ אין משיק המקביל לישר $y = x$.

פתרון מבחן מס׳ 29

תשובות

פתרון לשאלה 1

א. ***אם בסדרה יש מספר אי-זוגי של איברים, אז מספר האיברים במקומות האי-זוגיים גדול ב-1 ממספר האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.***

נסמן ב-n את מספר האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים, במקומות האי-זוגיים נמצאים $(n + 1)$ האיברים.

האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית: $0, 4, 8, \ldots$

האיבר הראשון שלה הוא 0, הפרש הסדרה 4. סכום של $n + 1$ האיברים ראשונים של הסדרה הזו:

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(0+4(n+1-1))}{2} = 2n^2 + 2n$$

איברים הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים סדרה חשבונית: $2, 6, 10, \ldots$

האיבר הראשון שלה הוא 2, הפרש הסדרה 4. הסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה הזו:

$$S_n = \frac{n(4+4(n-1))}{2} = 2n^2$$

לפי הנתון:

$$2n^2 + 2n = 1.2(2n^2)$$

$$0.4n^2 - 2n = 0 \quad /:0.4$$

$$n^2 - 5n = 0$$

למשוואה הזו יש פתרון אחד טבעי $n = 5$

חמישה איברים נמצאים במקומות הזוגיים, שישה איברים נמצאים במקומות האי-זוגיים, ובסך הכול יש בסדרה 11 איברים.

ב. האיבר האחרון בסדרה: $a_{11} = 0 + 2 \cdot 10 = 20$

לפי נוסחת הסכום של x איברים ראשונים של סדרה חשבונית:

$$S_x = \frac{x\,(0 + 2\,(x - 1))}{2} = x^2 - x$$

יש למצוא x כך ש- $x^2 - x = 20$

למשוואה הזו יש פתרון אחד טבעי $x = 5$

הסכום של חמשת האיברים הראשונים בסדרה המקורית שווה לאיבר האחרון של הסדרה.

פתרון לשאלה 2

א. נסמן: $BC = x$, אז $AC = \frac{3}{2}x$. לפי משפט פיתגורס במשולש ישר זווית ABC:

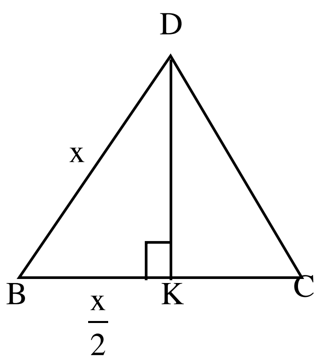
$$AB = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - x^2} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

לפי הנתון, פאה CBD היא משולש שווה צלעות, כלומר, $BC = BD = DC = x$

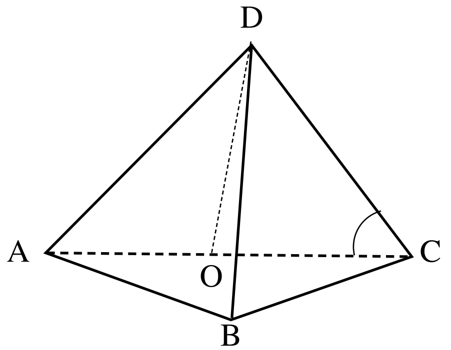
אורך הגובה של המשולש CBD: $DK = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = x\frac{\sqrt{3}}{2} = b \rightarrow x = \frac{2b}{\sqrt{3}}$

בפירמידה ישרה כל מקצועותיה הצדדיים שווים:

$$BD = AD = CD = x = \frac{2b}{\sqrt{3}}$$



בפירמידה ישרה, עקב הגובה הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס. במשולש ישר זווית ABC מרכז המעגל החוסם הוא אמצע היתר AC (נקודה O).



לפי משפט פיתגורס, במשולש ישר זווית DOC:

$$OC=\frac{AC}{2}=\frac{3}{4}x=\frac{3}{4}\cdot\frac{2b}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \ CD=\frac{2b}{\sqrt{3}}$$

$$DO=\sqrt{DC^2-OC^2}=\sqrt{\frac{4b^2}{3}-\frac{3b^2}{4}}=b\cdot\sqrt{\frac{7}{12}}=0.76b$$

ב. הזווית שבין המקצוע הצדדי DC ובין הבסיס היא הזווית DCO (הזווית שבין DC לבין היטלו CO במישור ABC).

במשולש ישר זווית DOC: $OC=\frac{\sqrt{3}}{2}b, CD=\frac{2b}{\sqrt{3}}$ אז

$$\cos\angle DCO=\frac{OC}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}b:(\frac{2b}{\sqrt{3}})=\frac{3}{4}\rightarrow\angle DCO\approx 41.41^\circ$$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t=M_0\cdot q^t$.

א. נרשום את הנתונים המתאימים לגדילת כמות האצות מ-5.5.2005 עד 5.5.2008:

$M_0=23{,}000, M_t=34{,}000, t=3$. עלינו למצוא את q.

$$q=\sqrt[3]{1.4782}\approx 1.139 \quad\leftarrow\quad q^3=\frac{34{,}000}{23{,}000}\approx 1.4782 \quad\leftarrow\quad 34{,}000=23{,}000\cdot q^3$$

כדי למצוא את אחוז גדילת כמות האצות בחצי שנה, נרשום את הנתונים הבאים: $t=0.5, q=1.139$

$$M_t=M_0\cdot 1.139^{0.5}\approx 1.0673M_0$$

כמות האצות באגם גדלה ב-6.7% בכל חצי שנה.

ב. מ-5.5.2005 עד 5.11.2015 עברו 10.5 שנים. נרשום את הנתונים המתאימים לגדילת כמות האצות בתקופה זו: $M_0 = 23{,}000,\ q = 1.139,\ t = 10.5$. עלינו למצוא את M_t

$$M_t = 23{,}000 \cdot 1.139^{10.5} \approx 90{,}204$$

ב-5.11.2015 באגם יהיו כ-90,204 ק"ג אצות.

פתרון לשאלה 4

א. נתון כי $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ אז:

$$f'(x) = 2\cos 2x - a\sin x \rightarrow f'(\frac{\pi}{2}) = 2\cos\pi - a\sin\frac{\pi}{2} = -2 - a = 0 \rightarrow a = -2$$

התקבלה הפונקציה $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$

ב. נכתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.

נחשב: $f(\frac{\pi}{2}) = \sin\pi - 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$ אז משוואת המשיק: $y = 0$ הוא ציר ה-x.

הפונקציה $f(x) = \sin 2x - 2\cos x$ היא פונקציה מחזורית בעלת המחזור 2π:

$$f(x + 2\pi) = \sin(2x + 4\pi) - 2\cos(x + 2\pi) = \sin 2x - 2\cos x = f(x)$$

כלומר, לגרף הפונקציה $f(x)$ יש אינסוף נקודות השקה לציר ה-x.
אלה כל הנקודות מהצורה $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ כאשר n הוא מספר שלם.

ג. נמצא את כל נקודות בהן הנגזרת שווה ל-0 ונמלא את טבלת תחומי העלייה והירידה בתחום $0 \le x \le 2\pi$:

$$f'(x) = 2\cos 2x + 2\sin x = 2 - 4\sin^2 x + 2\sin x = (1 - \sin x)(2 + 4\sin x) \rightarrow \sin x = 1 \text{ או } \sin x = -\frac{1}{2}$$

בתחום $0 \le x \le 2\pi$ הנגזרת שווה ל-0 בנקודות $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$:

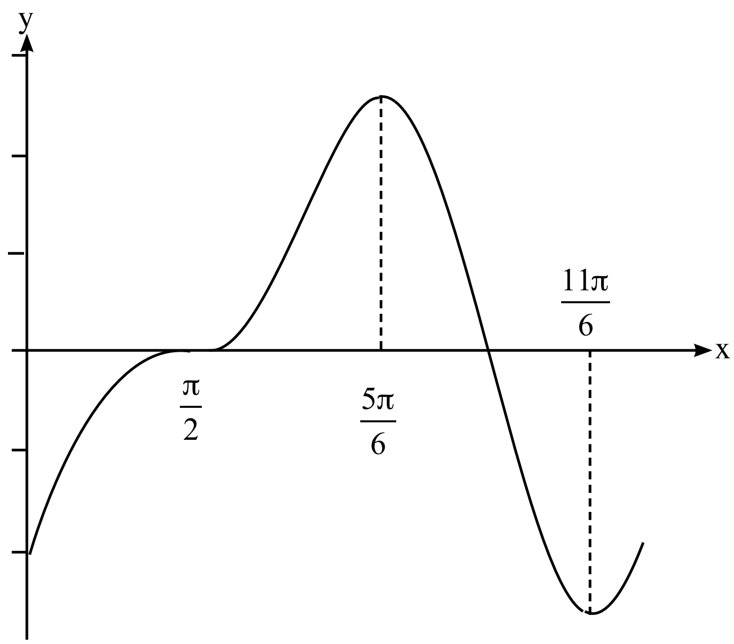
x	$0 \le x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \le x < \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6} < x \le 2\pi$
f '(x)	+	0	+	0	-	0	+
f(x)	עולה	0	עולה	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	יורדת	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	עולה
		אין קיצון		מקסימום		מינימום	

לפונקציה f(x) יש מינימום בנקודה שבה $x = \frac{11\pi}{6}$

לפונקציה f(x) יש מקסימום בנקודה שבה $x = \frac{5\pi}{6}$

בנקודה $x = \frac{\pi}{2}$ לפונקציה f(x) אין קיצון.

ד.



פתרון לשאלה 5

א. הפונקציה $f(x)$ מוגדרת עבור כל ערכי x.

ב. למציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה נמצא את הנגזרת שלה:

$$f'(x) = e^x - 2 = 0 \ \rightarrow e^x = 2 \rightarrow x = \ln 2 \approx 0.693$$

x	x<ln2	ln2	x>ln2
f'(x)	–	0	+
f(x)	יורדת	$2 - 2\ln 2 \approx 0.61$	עולה
מסקנה		מינימום	

הפונקציה $f(x)$ עולה בתחום $x > \ln 2$.

הפונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x < \ln 2$.

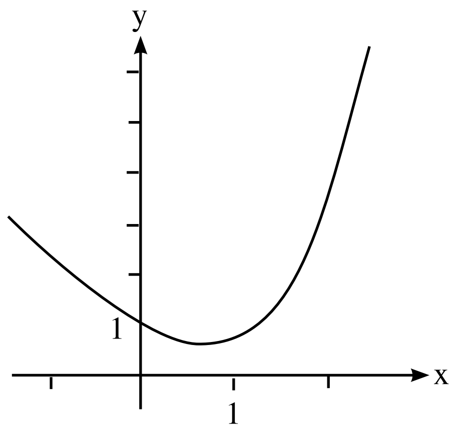
לפונקציה $f(x)$ יש נקודת מינימום $(\ln 2, 2 - 2\ln 2)$.

ג. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-y: כאשר $x = 0$, $f(x) = e^0 - 0 = 1$

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בנקודה $(0, 1)$

לגרף הפונקציה $f(x)$ אין נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

כי לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת, נקודה זו היא נקודת מינימום וערך הפונקציה בנקודה זו הוא חיובי.



ה. פונקציה f(x) היא פונקציית הנגזרת של הפונקציה g(x):

$$g'(x) = (e^x - x^2)' = e^x - 2x = f(x)$$

כיוון שהפונקציה f(x) חיובית בכל תחום הגדרתה, הפונקציה g(x) עולה לכל x.

ו. נמצא את שיעורי נקודות החיתוך של שני הגרפים:

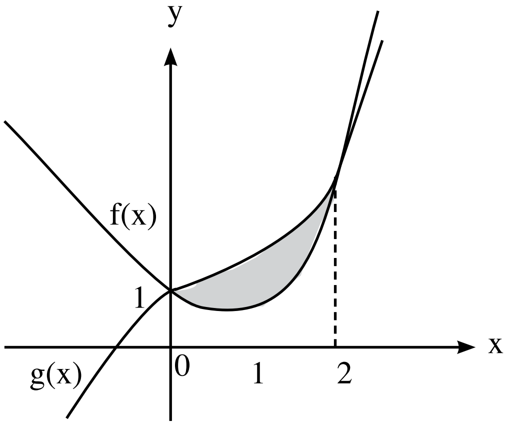
$$f(x) = g(x) \rightarrow e^x - 2x = e^x - x^2 \rightarrow 2x = x^2$$

$x = 0$ או $x = 2$.

$$S = \int_0^2 (g(x) - f(x))dx = \int_0^2 ((e^x - x^2) - (e^x - 2x))dx =$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = 1\frac{1}{3}$$

השטח בין שני הגרפים של הפונקציות f(x) ו-g(x) הוא $1\frac{1}{3}$



פתרון מבחן מס' 30

תשובות

פתרון לשאלה 1

שלושת המספרים הראשונים מהווים סדרה חשבונית: $a, a+d, a+2d$

לפי הנתון "סכום של ארבעה מספרים הוא 42", המספר האחרון הוא $42-(3a+3d)$

את הנתון: "שלושה מספרים אחרונים מהווים סדרה הנדסית" נכתוב כפרופורציה:

$$\frac{42-(3a+3d)}{a+2d} = \frac{a+2d}{a+d}$$

את הנתון "המספר הראשון קטן מהמספר האחרון פי 4.5" נכתוב כמשוואה: $42-(3a+3d) = 4.5a$

אחרי פישוט: $d = 14-2.5a$

נציב בפרופורציה:

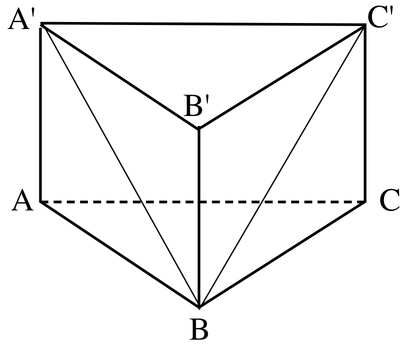
$$\frac{42-(3a+3(14-2.5a))}{a+2(14-2.5a)} = \frac{a+2(14-2.5a)}{a+(14-2.5a)}$$

אחרי פישוט: $22.75a^2 - 287a + 784 = 0$

למשוואה זו יש פתרון שלם אחד $a = 4$. נציב ב- $d = 14-2.5a$ $\leftarrow$ $d = 4$

ארבעת המספרים הם: $4, 8, 12, 18$

פתרון לשאלה 2



א. (1) נקודה K היא אמצע הקטע AC. לכן BK הוא תיכון וגובה במשולש שווה שוקיים ABC.

במשולש ישר זווית ABK:

$$\cos\angle BAK=\frac{AK}{AB}\ \rightarrow\ AK=AB\cdot\cos 30^\circ=b\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ \rightarrow\ AC=2AK=b\sqrt{3}$$

$$BK=b\cdot\sin 30^\circ=\frac{b}{2}$$

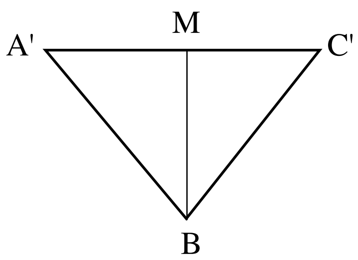
המשולש 'BA'C הוא משולש שווה שוקיים: A'B = C'B כי קטעים אלה הם אלכסונים במלבנים חופפים.

כיוון שהבסיסים של המנסרה הם מצולעים חופפים, A'C' = AC.

במשולש 'BA'C, BM הוא תיכון וגובה.

לפי הנתון שטח המשולש 'BA'C הוא $1.5b^2$ אז

$$\frac{1}{2}A'C'\cdot BM=\frac{1}{2}b\sqrt{3}\cdot BM=1.5b^2\ \rightarrow\ BM=b\sqrt{3}$$



לפי משפט פיתגורס:

$$A'B=\sqrt{\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2+BM^2}=\sqrt{\frac{3}{4}b^2+3b^2}=b\frac{\sqrt{15}}{2}$$

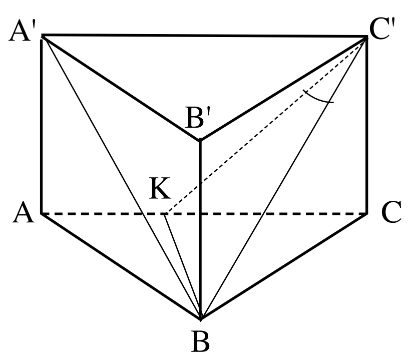
לפי משפט פיתגורס, במשולש ישר זווית AA'B:

אורך המקצוע הצדדי של המנסרה,

$$AA'=\sqrt{A'B^2-AB^2}=\sqrt{\frac{15}{4}b^2-b^2}=b\frac{\sqrt{11}}{2}\approx 1.658b$$

(2) שטח הפנים של המנסרה:

$$(AB+BC+AC)\cdot AA'+2S_{ABC}=(2b+b\sqrt{3})\cdot b\frac{\sqrt{11}}{2}+AC\cdot BK=b^2(\sqrt{11}+\frac{\sqrt{33}}{2})+b^2\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 7.055b^2$$



ב. הזווית בין האלכסון 'BC ובין הפאה הצדדית AA'C'C היא הזווית שבין 'BC להיטלו C'K במישור AA'C'C כלומר זווית KC'B.

$BK\perp AC$ וגם $BK\perp C'C$ אז BK הוא אנך ל-AA'C'C.

במשולש ישר זווית $KC'B$: $BK=\frac{b}{2},\ \ BC'=BA'=\frac{b\sqrt{15}}{2}$

$$\sin\angle KC'B=C'=\frac{b}{2}:(\frac{b\sqrt{15}}{2})=\frac{1}{\sqrt{15}},\ \angle KC'B\approx 14.48^\circ$$

פתרון לשאלה 3

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t=M_0\cdot q^t$.

א. **בשאלה זאת נוח לקחת חצי שעה כיחידת זמן.**

נרשום את הנתונים המתאימים להתפרקות החומר משעה 8:30 בבוקר עד הצהריים:

$M_0=230,\ M_t=62,\ t=7$, עלינו למצוא את q.

$$q=\sqrt[7]{0.27}\approx 0.829 \quad\leftarrow\quad q^7=\frac{62}{230}\approx 0.27 \quad\leftarrow\quad 62=230\cdot q^7$$

כמות החומר הרדיואקטיבי אחרי חצי שעה היא 82.9% מהכמות ההתחלתית. הכמות קטנה בזמן זה ב-$100\%-82.9\%=17.1\%$

משקל החומר הרדיואקטיבי בכל חצי שעה קטן ב-17.1%.

ב. נרשום את הנתונים עבור זמן מחצית החיים של החומר הרדיואקטיבי:

$M_t=0.5\,M_0$, $q=0.829$, עלינו למצוא את t.

נציב בנוסחה:

$$0.5=0.829^t \quad\leftarrow\quad 0.5M_0=M_0\cdot 0.829^t$$
$$t=\log_{0.829}0.5\approx 3.7$$

לקחנו חצי שעה כיחידת זמן, אז 3.7 יחידת זמן הוא 1.85 שעות או שעה ו-51 דקות.

זמן מחצית החיים של החומר הרדיואקטיבי הוא שעה ו-51 דקות.

פתרון לשאלה 4

א. גרף I הוא גרף הפונקציה $f(x)$ וגרף II הוא גרף פונקצית הנגזרת שלה כי תחומי העלייה והירידה בגרף I הם תחומי החיוביות ושליליות בגרף II בהתאמה.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית כי לכל ערך של x מתקיים:

$$f(-x)=(-x)\cdot\sin(-x)=(-x)\cdot(-\sin x)=x\sin x=f(x)$$

נמצא את פונקצית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ לפי כלל הנגזרת של המכפלה:

$$f'(x)=x'\ \cdot\sin x+x\cdot(\sin x)'=\sin x+x\cos x$$

לכל ערך של x מתקיים:

$$f'(-x)=\sin(-x)-x\cos(-x)=-\sin x-x\cos x=-f'(x)$$

פונקצית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ג.

$$f'(x)=\sin x+x\cos x\ \rightarrow f'(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{2}$ היא $y=\frac{\pi}{2}+(x-\frac{\pi}{2})$ או $y=x$.

ד. $$S=-\int_{-1}^{0}f'(x)dx=-f(x)\Big|_{-1}^{0}=-(x\sin x)\Big|_{-1}^{0}=-0+\sin 1\approx 0.84$$

השטח הצבוע בסרטוט הוא $\sin 1.0.84$.

פתרון לשאלה 5

א. לפי הגרף של פונקציית הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ אפשר למלא את הטבלה.

x	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f'(x)$	0	+	0	-
$f(x)$		עולה	0	יורדת
מסקנה			מקסימום	

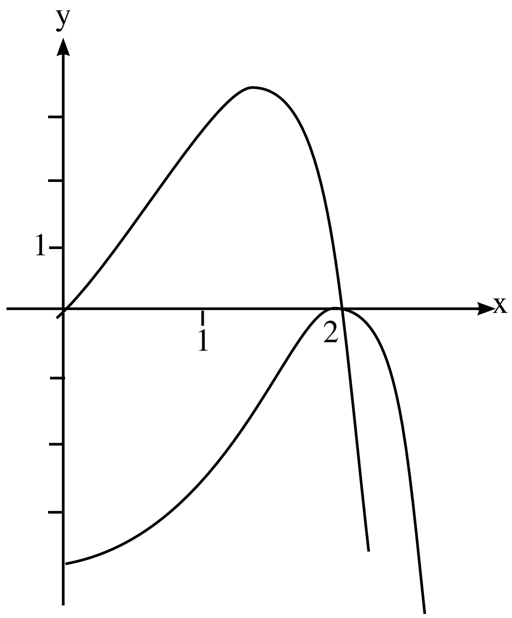
פונקציה $f(x)$ עולה בתחום $0 < x < 2$

פונקציה $f(x)$ יורדת בתחום $x > 2$

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בתחום. זאת נקודת מקסימום $(2, 0)$.

ב. הטענה הנכונה היא טענה b "עבור כל ערכי ה-x $f(x) \le 0$" כי בנקודת מקסימום $f(x) = 0$ ואין נקודות קיצון נוספות.

ג. ראו גרף



ד. נמצא ביטוי לפונקציה $f'(x)$ כנגזרת של פונקציה מכפלה:

$$f'(x) = (4 - 2x)e^x + (4x - x^2 - 4)e^x = (2x - x^2)e^x$$

פונקציה $f(x)$ היא פונקציה קדומה של הפונקציה $f'(x)$:

$$S = \int_0^2 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^2 = (4x - x^2 - 4)e^x\Big|_0^2 = 0 - (-4e^0) = 4e^0 = 4$$

השטח המוגבל בגרף הנתון ובציר ה-x הוא 4.