פתרונות מלאים

למבחנים 16, 17, 18, 19, 20

פתרון מבחן מתכונת מס׳ 16

תשובות

פתרון שאלה 1

מחיר כרטיס **עמידה** הוא 600 ש״ח.

מחיר כרטיס **ישיבה** גבוה ב־$x\%$ ממחיר כרטיס **עמידה** ולכן מחירו הוא:

$$\frac{600 \cdot (100 + x)}{100} = 600 + 6x$$

מחיר כרטיס VIP גבוה ב־20% ממחיר כרטיס **ישיבה** ולכן מחירו הוא:

$$\frac{120 \cdot (600 + 6x)}{100} = 1.2(600 + 6x)$$

נבנה משוואה:

$$1.2\,(600 + 6x) = 828$$

$$720 + 7.2x = 828$$

$$7.2x = 108 \quad / : 7.2$$

$$\boxed{x = 15}$$

התשובה: מחיר כרטיס **ישיבה** גבוה ב־15% ממחיר כרטיס **עמידה**.

פתרון שאלה 2

נבנה טבלה המתארת את הבעיה:

המכוניות נפגשו **באמצע** הדרך, כלומר כל מכונית עברה 300 ק״מ.

נסמן ב־x את מהירות המכונית.

נשתמש בנוסחה: $\boxed{\text{מהירות} \cdot \text{זמן} = \text{דרך}}$

	מהירות V	**זמן t**	**דרך S**
מכונית	x	$\frac{300}{x}$	300
מונית	$x + 25$	$\frac{300}{x + 25}$	300

המונית יצאה שעה אחת **אחרי** המכונית, כלומר היא נסעה שעה אחת **פחות** מהמכונית. לכן, כשנשווה את זמני הנסיעה של שני כלי הרכב נוסיף **למונית** את השעה החסרה.

$$\frac{300}{x} = \frac{300}{x+25} + 1 \quad / \, x\,(x+25)$$

$$300\,(x+25) = 300x + x\,(x+25)$$

$$300x + 7500 = 300x + x^2 + 25x$$

$$0 = 300x + x^2 + 25x - 300x - 7500$$

$$0 = x^2 + 25x - 7500$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = 25 \quad c = -7500$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7500)}}{2 \cdot 1} = \frac{-25 \pm \sqrt{30625}}{2} = \frac{-25 \pm 175}{2}$$

$$x_1 = \frac{-25+175}{2} = 75$$

$$x_2 = \frac{-25-175}{2} = -100 \quad \leftarrow \quad \text{נפסל}$$

התשובה: מהירות המכונית 75 קמ"ש.

פתרון שאלה 3

א. נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:

נציב את הנקודות $E\,(3, 7) \quad A\,(-4, 6)$:

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$7 = \frac{6 + y_B}{2} \quad / \cdot 2$$

$$14 = 6 + y_B$$

$$8 = y_B$$

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$3 = \frac{-4 + x}{2} \quad / \cdot 2$$

$$6 = -4 + x$$

$$10 = x$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{B\,(10, 8)}$$

ב. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$
$$d_{BC} = 10 \quad \rightarrow \quad d^2{}_{BC} = 100$$
$$100 = \left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2$$
$$100 = (10 - x)^2 + (8 - O)^2$$
$$100 = (10 - x)\,(10 - x) + 64$$
$$100 = 100 - 10x - 10x + x^2 + 64$$
$$0 = x^2 - 20x + 64$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -20 \quad c = 64$

נציב בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 64}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{20 \pm 12}{2}$$

$x_1 = \frac{20 + 12}{2} = \frac{32}{2} = 16 \leftarrow$ $x < 10$ ולכן פתרון זה נפסל

$$x_2 = \frac{20 - 12}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

ג. נשתמש בנוסחה למציאת שיפוע על פי שתי נקודות:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 + x_1}$$
$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{0 - 6}{4 + 4} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$$
$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{0 - 8}{4 - 10} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

m_{AC} הפכי ונגדי ל-m_{BC} ולכן $AC \perp BC$.

פתרון שאלה 4

א. $\boxed{\text{שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה.}}$

נגזור את הפונקציה $y = Ax + \frac{4}{x}$. ניעזר בנוסחה: $\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = \frac{-a \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$.

$$y' = A + \frac{-4}{x^2} = A - \frac{4}{x^2}$$

נציב בנגזרת $x = 4$ ונשווה $y' = \frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4} = A - \frac{4}{4^2}$$

$$\frac{3}{4} = A - \frac{4}{16} \quad / \cdot 16$$

$$12 = 16A - 4$$

$$16 = 16A \quad / : 16$$

$$\boxed{1 = A}$$

הפונקציה היא: $y = x + \frac{4}{x}$.

ב. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מאפס, כלומר כאשר $x \neq 0$.

ג. $\boxed{\text{בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0}}$

נגזור את הפונקציה $y = x + \frac{4}{x}$ ונשווה את הנגזרת ל־0.

$$y' = 1 + \frac{-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$0 = 1 - \frac{4}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = x^2 - 4$$

$$4 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 2} \quad \boxed{x = -2}$$

נציב את ערכי ה־x שמצאנו בפונקציה המקורית:

$$y_{(2)} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$y_{(-2)} = -2 + \frac{4}{-2} = -4$$

קיבלנו את נקודות הקיצון: $(2 , 4)$ $(-2 , -4)$. כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בטבלה:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y'	+	0	–		–	0	+
y	↗	Max	↘		↘	Min	↗

נציב בטבלה את נקודות הקיצון ואת הנקודה שמצאנו בתחום ההגדרה. נבחר נקודות ביניהן ונציב את הנקודות שבחרנו **בנגזרת**. אם התוצאה חיובית – הפונקציה עולה ואם התוצאה שלילית – הפונקציה יורדת.

קיבלנו כי נקודות הקיצון הן: $Min\ (2 , 4)$, $Max\ (-2 , -4)$.

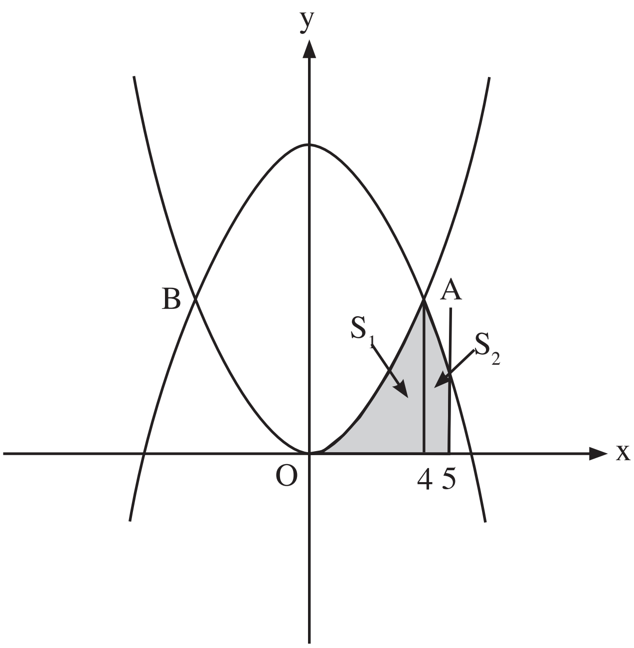
ד. את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה נוכל למצוא בטבלה.

הפונקציה עולה בתחום: $x > 2$, $-2 > x$.

הפונקציה יורדת בתחום: $2 > x > 0$, $0 > x > -2$.

פתרון שאלה 5

א. נשווה את הפונקציות:



$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = -x^2 + 32 \end{cases}$$

$$x^2 = -x^2 + 32$$

$$2x^2 = 32 \quad / : 2$$

$$x^2 = 16 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 4} \quad \boxed{x = -4}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\boxed{x_A = 4} \quad \boxed{x_B = -4}$$

ב. נפצל את השטח לשני שטחים: S_1 , S_2.

את S_1 נמצא בעזרת **אינטגרל** של הפונקציה $f(x)$ מעל ציר ה־x בתחום שבין $x = 0$ ל־$x = 4$.

$$S_1 = \int_0^4 x^2 \; dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left(\frac{4^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right) = 21\frac{1}{3}$$

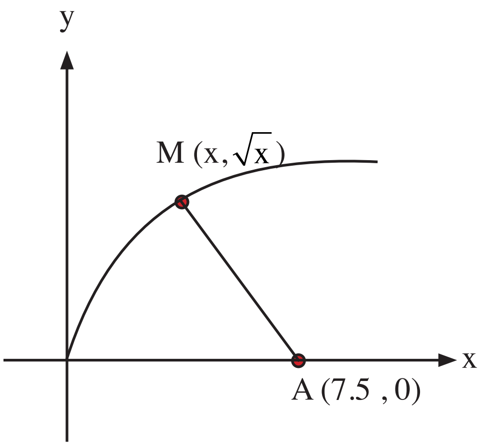
את S_2 נמצא בעזרת **אינטגרל** של הפונקציה $g(x)$ מעל ציר ה־x בתחום שבין $x = 4$ ל־$x = 5$.

$$S_2 = \int_4^5 \left(-x^2 + 32\right) \; dx = \left[\frac{-x^3}{3} + 32x\right]_4^5 = \left(\frac{-5^3}{3} + 32 \cdot 5\right) - \left(\frac{-4^3}{3} + 32 \cdot 4\right) =$$

$$= \left(-41\frac{2}{3} + 160\right) - \left(-21\frac{1}{3} + 128\right) = 118\frac{1}{3} - 106\frac{2}{3} = 11\frac{2}{3}$$

השטח הוא: $S_1 + S_2 + 21\frac{1}{3} + 11\frac{2}{3} = 33$.

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את שיעור ה־x של הנקודה M.

הנקודה M נמצאת על גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$

ולכן שיעור ה־y שלה הוא $\sqrt{x}$.

ניעזר בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$d_{AM}^2 = \left(x - 7.5\right)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2 = \left(x - 7.5\right)\left(x - 7.5\right) + x$$

$$d_{AM}^2 = x^2 - 7.5x - 7.5x + 56.25 + x = x^2 - 14x + 56.25$$

אורך הקטע AM הוא:

$$\boxed{d_{AM} = \sqrt{x^2 - 14x + 56.25}}$$

ב. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

$$d' = \frac{2x - 14}{2\sqrt{x^2 - 14x + 56.25}}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0 = \frac{2x - 14}{2\sqrt{x^2 - 14x + 56.25}} \quad / \cdot 2\sqrt{x^2 - 14x + 56.25}$$

$$0 = 2x - 14$$

$$14 = 2x \quad / : 2$$

$$\boxed{7 = x}$$

כדי לבדוק כי מדובר במינימום ניעזר בנגזרת השנייה.

כדי למצוא את **סימן** הנגזרת השנייה מספיק לגזור רק את **המונה**: $d'' = 2$ סימן

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר ב**מינימום**.

התשובה: ערך ה־x של הנקודה M צריך להיות 7.

פתרון מבחן מתכונת מס׳ 17

תשובות

פתרון שאלה 1

.

נסמן ב־x את מחיר המחשב וב־y את מחיר המסך.

אם מחיר המחשב עולה ב־15%, מחירו החדש יהיה: $\frac{115x}{100} = 1.15x$

אם מחיר המסך יורד ב־25%, מחירו החדש יהיה: $\frac{75y}{100} = 0.75y$

נבנה שתי משוואות:

$$\begin{cases} x + y = 2500 & / \cdot (-0.75) \\ \underline{1.15x + 0.75y = 2595} \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -0.75x - 0.75y = -1875 \\ \underline{1.15x + 0.75y = 2595} \end{cases}$$

$$0.4x = 720 \quad / : 0.4$$

$$\boxed{x = 1800}$$

נציב $x = 1800$ במשוואה הראשונה ונקבל:

$$1800 + y = 2500$$

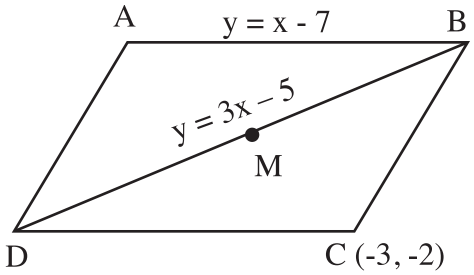
$$\boxed{y = 700}$$

התשובה: מחיר המחשב הוא 1,800 ש"ח ומחיר המסך 700 ש"ח.

פתרון שאלה 2

א. נקודה B נמצאת על הישרים $y = x - 7$

ו־$y = 3x - 5$. נשווה ביניהם:



$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$$

$$3x - 5 = x - 7$$

$$2x = -2$$

$$\boxed{x = -1}$$

נציב $x = -1$ במשוואה הראשונה ונקבל:

$$y = -1 - 7 = -8 \quad \rightarrow \quad \boxed{B\,(-1, -8)}$$

ב. נמצא את משוואת DC. ABCD מקבילית ולכן: $AB \parallel CD$.

לישרים מקבילים יש שיפועים שווים ולכן: $m_{CD} = m_{AB} = 1$

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

נתון: $m_{DC} = 1 \quad C\,(-3, -2)$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y + 2 = 1\,(x + 3)$$

$$y + 2 = x + 3$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

נשווה את משוואות CD ו־BD:

$$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$3x - 5 = x + 1$$

$$2x = 6 \quad / : 2$$

$$\boxed{x = 3}$$

נציב $x = 3$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$y = 3 + 1 = 4$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{D\,(3, 4)}$$

ג. האלכסונים במקבילית **חוצים** זה את זה ולכן:

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \qquad x_M = \frac{x_B + x_D}{2}$$

$$y_M = \frac{-8+4}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \qquad x_M = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{M\ (1, -2)}$$

נקודה M היא גם אמצע הקטע AC ולכן:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$1 = \frac{x-3}{2} \quad / \cdot 2 \qquad -2 = \frac{y-2}{2} \quad / \cdot 2$$

$$2 = x - 3 \qquad -4 = y - 2$$

$$\boxed{5 = x} \qquad \boxed{-2 = y}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{A\ (5, -2)}$$

פתרון שאלה 3

א. הנוסחה למציאת משוואת המעגל היא: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ כאשר $M\ (a\ ,\ b)$ היא נקודת מרכז המעגל.

נתונה המשוואה $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 65$ ולכן מרכז המעגל הוא $M\ (5\ ,\ 3)$.

נמצא שיפוע ישר על פי שתי נקודות $K\ (6\ ,\ 11)$ ו־$M\ (5\ ,\ 3)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{KM} = \frac{y_K - y_M}{x_K - x_M} = \frac{11-3}{6-5} = \frac{8}{1} = 8$$

נמצא משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

נציב $m = 8$ ו־$K\ (6\ ,\ 11)$ ונקבל:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 11 = 8\ (x - 6)$$

$$y - 11 = 8x - 48$$

$$\boxed{y = 8x - 37}$$

ב. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה (K), ולכן $m=-\frac{1}{8}$ משיק (ישרים מאונכים – שיפוע הפכי ונגדי).

נמצא את משוואת המשיק על פי שיפוע $\left(m=-\frac{1}{8}\right)$ ונקודה $K(6\ ,\ 11)$:

$$y-11=-\frac{1}{8}(x-6)$$

$$y-11=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{4}$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{8}x+11\frac{3}{4}}$$

ג. נקודה A נמצאת על ציר ה־y ולכן $x_A=0$. נציב ונקבל:

$$y=-\frac{1}{8}\cdot 0+11\frac{3}{4}=11\frac{3}{4}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{A\left(0\ ,\ 11\frac{3}{4}\right)}$$

נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2$$

$$d_{AM}^2=\left(x_M-x_A\right)^2+\left(y_M-y_A\right)^2=(5-0)^2+\left(3-11\frac{3}{4}\right)^2=25+76\frac{9}{16}=101\frac{9}{16}$$

$$d_{AM}=\sqrt{101\frac{9}{16}}=10.077$$

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה $f(x)=4\sqrt{x}-2x$ מוגדרת כאשר השורש הריבועי **לא** שלילי, כלומר כאשר: $\boxed{0\le x}$

ב. הפונקציה חותכת את ציר ה־y כאשר $x=0$.

$$f_{(0)}=4\sqrt{0}-2\cdot 0=0$$

נקודת החיתוך עם ציר ה־y היא $(0\ ,\ 0)$.

הפונקציה חותכת את ציר ה־x כאשר $y=0$.

$$0=4\sqrt{x}-2x$$

$$2x=4\sqrt{x}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל:

$$4x^2=16x$$

$$4x^2-16x=0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 4 \quad b = 16 \quad c = 0$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 4} = \frac{16 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{16 \pm 16}{8}$$

$$x_1 = \frac{16 + 16}{8} = \frac{32}{8} = 4$$

$$x_2 = \frac{16 - 16}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־x הן: $(0 , 0)$ $(4 , 0)$.

ג. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'_{(x)} = \frac{4 \cdot 1}{2\sqrt{x}} - 2 = \frac{4}{2\sqrt{x}} - 2$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0 = \frac{4}{2\sqrt{x}} - 2 \quad / \cdot 2\sqrt{x}$$

$$0 = 4 - 4\sqrt{x}$$

$$4\sqrt{x} = 4 \quad / : 4$$

$$\sqrt{x} = 1 \quad / (\ )^2$$

נעלה את שני האגפים בריבוע:

$$\boxed{x = 1}$$

נציב $x = 1$ בפונקציה המקורית ונקבל:

$$f_{(1)} = 4\sqrt{1} - 2 \cdot 1 = 2$$

נקודת הקיצון היא $(1 , 2)$. כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בטבלה:

x		0	$\frac{1}{2}$	1	2
y'			+	0	–
y			↗	max	↘

נציב בטבלה את נקודת הקיצון ואת הנקודה שמצאנו בתחום ההגדרה. נבחר ביניהן נקודות ונציב אותן **בנגזרת**. אם התוצאה חיובית – הפונקציה עולה ואם התוצאה שלילית – הפונקציה יורדת.

קיבלנו כי נקודת הקיצון היא $(1 , 2)$ max.

ד. את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה נוכל למצוא בעזרת הטבלה.

הפונקציה עולה בתחום $0 < x < 1$.

הפונקציה יורדת בתחום $1 < x$.

פתרון שאלה 5

א. בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0

נגזור את הפונקציה

$y = x^3 - 3x + 4$:

$y' = 3x^3 - 3$

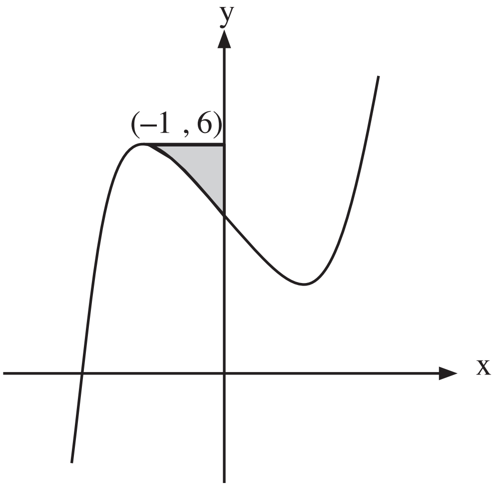
נשווה את הנגזרת ל־0:

$0 = 3x^2 - 3$

$3 = 3x^2 \quad / : 3$

$1 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$

$\boxed{x = 1} \quad \boxed{x = -1}$



נציב את ערכי ה־x שקיבלנו בפונקציה המקורית:

$y_{(1)} = 1^3 - 3 \cdot 1 + 4 = 2 \quad \rightarrow \quad (1 , 2)$

$y_{(-1)} = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 4 = 6 \quad \rightarrow \quad (-1 , 6)$

כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בנגזרת שנייה.

$y'' = 6x$

$y''_{(1)} = 6 \cdot 1 = 6$

$y''_{(-1)} = 6 \cdot (-1) = -6$

בנקודה $(1 , 2)$ הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום**.

בנקודה $(-1 , 6)$ הנגזרת השנייה **שלילית** ולכן מדובר **במקסימום**.

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום הוא O.

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר:

נציב: $(-1 , 6) \quad m = 0$

$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$

$y - 6 = 0\ (x + 1)$

$y - 6 = 0$

$\boxed{y = 6}$

ג. כדי למצוא את השטח ניעזר **באינטגרל** של המשיק מעל הפונקציה בתחום שבין $x=-1$ ל־$x=0$.

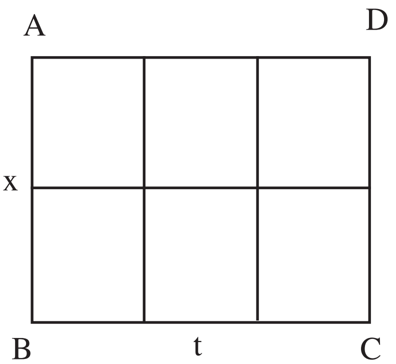
נעשה פונקציית הפרש (נחסר את הפונקציה מהמשיק):

$$6-\left(x^3-3x+4\right)=6-x^3+3x-4=-x^3+3x+2$$

$$S=\int_{-1}^{0}\left(-x^3+3x+2\right)\,dx=\left[\frac{-x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}=\left(\frac{-0^4}{4}+\frac{3\cdot 0^2}{2}+2\cdot 0\right)-$$

$$-\left(-\frac{(-1)^4}{4}+\frac{3(-1)^2}{2}+2\cdot(-1)\right)=(0)-\left(-\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}-2\right)=\frac{3}{4}$$

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את אורך המוט AB וב־t את אורך המוט BC.

ניעזר בנוסחה לשטח מלבן: $S=a\cdot b$

$S=x\cdot t=12$

נבודד את t: $\boxed{t=\frac{12}{x}}$

נבטא את סכום אורכי המוטות: $y=4x+3t=4x+3\cdot\frac{12}{x}=4x+\frac{36}{x^2}$

ב. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה $\left(\frac{a}{f_{(x)}}\right)'=\frac{-a\cdot f'_{(x)}}{\left(f_{(x)}\right)^2}$:

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$y'=4+\frac{-36}{x^2}=4-\frac{36}{x^2}$$

$$0=4-\frac{36}{x^2}\quad /\cdot x^2$$

$$0=4x^2-36$$

$$36=4x^2\quad /:4$$

$$9=x^2\quad /\sqrt{\ }$$

$\boxed{x=3}$ $\boxed{x=-3}$ $\leftarrow$ אורכי המוט חיוביים ולכן תשובה זו נפסלת

כדי לבדוק שסכום האורכים מינימלי ניעזר בנגזרת שנייה: $y''=\frac{36\cdot 2x}{x^4}=\frac{72x}{x^4}$

נציב $x = 3$ בנגזרת השנייה:

$$y''_{(3)} = \frac{72 \cdot 3}{3^4} = 2\frac{2}{3}$$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום**.

התשובה: אורך המוט AB צריך להיות 3 מטרים $= x$.

פתרון מבחן מתכונת מס' 18

תשובות

פתרון שאלה 1

.

מחיר המוצר בהתחלה היה 5,000 ש"ח.

נסמן ב־x את אחוז ההוזלה של המוצר.

מחיר המוצר לאחר ההוזלה הראשונה הוא:

$$\frac{5000 \cdot (100 - x)}{100} = 50\,(100 - x)$$

מחיר המוצר לאחר ההוזלה השנייה הוא:

$$50\,(100 - x) \cdot \frac{(100 - x)}{100} = \frac{(100 - x)\,(100 - x)}{2}$$

ידוע כי מחיר המוצר לאחר שתי הוזלות היה 3,612.5 ש"ח.

ולכן נבנה משוואה:

$$\frac{(100 - x)\,(100 - x)}{2} = 3612.5 \quad / \cdot 2$$

$$(100 - x)\,(100 - x) = 7225$$

$$10000 - 100x - 100x + x^2 = 7225$$

$$x^2 - 200x + 2775 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -200 \quad c = 2775$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{200 \pm \sqrt{(-200)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2775}}{2 \cdot 1} = \frac{200 \pm \sqrt{28900}}{2} = \frac{200 \pm 170}{2}$$

$$x_1 = \frac{200 + 170}{2} = \frac{370}{2} = 185 \leftarrow$$

נפסל בגלל שהמחיר לאחר ההוזלה הראשונה יוצא שלילי

$$x_2 = \frac{200 - 170}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

התשובה: בעל החנות הוזיל את המחיר בכל פעם ב-15%.

פתרון שאלה 2

א. נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_E = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_E = \frac{-1+9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad y_E = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E\left(4, \frac{1}{2}\right)}$$

ב. נמצא את שיפוע AB על פי שתי נקודות:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_{AB} = \frac{3+2}{9+1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

לישרים מאונכים יש שיפוע הפכי ונגדי ולכן: $m = -2$ (האנך)

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

ניעזר בנקודה $E\ \ 4, \frac{1}{2}$ ובשיפוע $m = -2$ ונקבל:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2\ (x - 4)$$

$$y - \frac{1}{2} = -2x + 8$$

$$\boxed{y = -2x + 8\frac{1}{2}}$$

ג. כדי למצוא את הנקודה C נציב $y = 6.5$ במשוואה ונקבל:

$$6.5 = -2x + 8.5$$

$$2x = 2 \quad / : 2$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c\ (1, 6.5)}$$

פתרון שאלה 3

א. נמצא את שיפוע הישר $2x + 4y = 20$. נבודד את y:

$$4y = -2x + 20 \quad / : 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{2}}$$

BC מאונך לישר הנתון ולכן $m_{BC} = 2$ (שיפוע הפכי ונגדי).

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

נציב את $m_{BC} = 2$ ואת הנקודה $B\ (5, 10)$ ונקבל:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

$$y - 10 = 2\ (x - 5)$$

$$y - 10 = 2x - 10$$

משוואת BC $\leftarrow$ $\boxed{y = 2x}$

ב. נקודה C נמצאת על הישר $2x + 4y = 20$ ועל האנך $y = 2x$.

נפתור מערכת משוואות:

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

נציב $y = 2x$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$2x + 4 \cdot 2x = 20$$

$$2x + 8x = 20$$

$$10x = 20 \quad / : 10$$

$$\boxed{x = 2}$$

נציב $x = 2$ במשוואה הראשונה ונקבל:

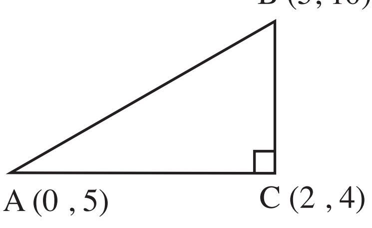
$$y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C\ (2\ ,\ 4)}$$

ג. AB הוא קוטר המעגל החוסם את משולש ABC,

ולכן מרכז המעגל (M) הוא אמצע הקטע AB.



נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_M = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{5+10}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M\left(2\frac{1}{2}\ ,\ 7\frac{1}{2}\right)}$$

פתרון שאלה 4

א. **בנקודת הקיצון הנגזרת שווה ל־0.**

נגזור את הפונקציה ונציב $x = 1$, $y' = 0$:

$$y = x^3 - Ax^2 + 9x$$

$$y' = 3x^2 - 2Ax + 9$$

$$0 = 3 \cdot 1^2 - 2A \cdot 1 + 9$$

$$0 = 3 - 2A + 9$$

$$2A = 12$$

$\boxed{A = 6} \quad \rightarrow \quad y = x^3 - 6x^2 + 9x$:הפונקציה היא

ב. נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל־0.

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$0 = 3x^2 - 12x + 9 \quad / : 3$$

$$0 = x^2 - 4x + 3$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -4 \quad c = 3$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

נציב את ערכי ה־x בפונקציה המקורית:

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad y_1 = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow \quad (3\ ,\ 0)$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 4 \quad \rightarrow \quad (1\ ,\ 4)$$

כדי לגלות את סוגן נבנה טבלה:

x	0	1	2	3	4
y'	+	0	–	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

נציב את ערכי ה־x שמצאנו. ביניהם נסמן נקודות ונציב אותן **בנגזרת**. אם התוצאה חיובית – הפונקציה עולה ואם התוצאה שלילית – הפונקציה יורדת.

קיבלנו: min (3 , 0)

max (1 , 4)

ג. בנקודת החיתוך עם ציר ה־y $x = 0$:

$$y = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 = 0$$

↓

(0 , 0)

בנקודת החיתוך עם ציר ה־x $y = 0$:

$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x$$

נוציא x כגורם משותף:

$$0 = x(x^2 - 6x + 9)$$

זכור: אם $a \cdot b = 0$ **אז** $a = 0$ **או** $b = 0$

$\boxed{x = 0}$ או $x^2 - 6x + 9 = 0$

↓

(0 , 0)

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -6 \quad c = 9$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$x_1 = \frac{6+0}{2} = 3$$

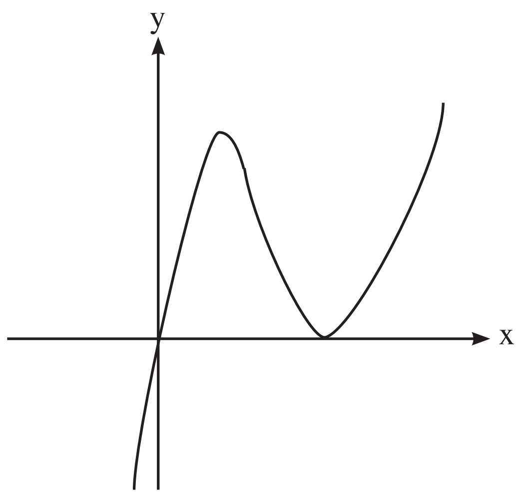
$$x_2 = \frac{6+0}{2} = 3$$

↓

(3 , 0)

נקודות החיתוך עם הצירים הן (0 , 3) , (0 , 0).

ד. נסרטט סקיצה:



ה. מהסרטוט אפשר להסיק שהפונקציה שלילית כאשר $x < 0$.

פתרון שאלה 5

א. כדי למצוא את הפונקציה $f_{(x)}$ ניעזר **באינטגרל** של הנגזרת.

$$f(x) = \int\left(3x^2 + 4x - 8\right) dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 8x + c = x^3 + 2x^2 - 8x + c$$

נציב $x = 1$ $f(x) = -5$ ונקבל:

$$-5 = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + c$$
$$-5 = 1 + 2 - 8 + c$$
$$\boxed{0 = c} \rightarrow \boxed{f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x}$$

ב. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־x: $y = 0$.

נוציא x כגורם משותף ונקבל:

$$0 = x^3 + 2x^2 - 8x$$
$$0 = x\ (x^2 + 2x - 8)$$

זכור: כאשר $a \cdot b = 0$ $a = 0$ או $b = 0$

$$\boxed{x = 0} \quad \text{או} \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $c = -8$ $b = 2$ $a = 1$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

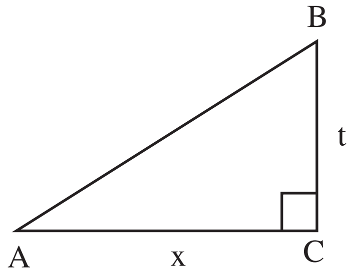
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-2-6}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

התשובה: נקודות החיתוך עם ציר ה־x הן: $(0\ ,0)$ $(2\ ,0)$ $(-4\ ,0)$.

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את אורך הניצב AC וב־t את אורך הניצב BC.

נתון: $AC + BC = 18 \leftarrow x + t = 18$

$$\boxed{t = 18 - x}$$

ניעזר בנוסחה למציאת שטח משולש:

$$S = \frac{\text{גובה} \cdot \text{בסיס}}{2}$$

$$S = \frac{x \cdot t}{2} = \frac{x\,(18 - x)}{2} = \frac{18x - x^2}{2} = 9x - \frac{1}{2}x^2$$

נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל־0:

$$S' = 9 - x = 0$$

$$\boxed{9 = x} \rightarrow \boxed{t = 9}$$

כדי לבדוק כי מדובר בשטח מקסימלי ניעזר בנגזרת שנייה: $S'' = -1$

קיבלנו כי הנגזרת השנייה **שלילית** ולכן מדובר **במקסימום**.

התשובה: אורך כל ניצב צריך להיות 9 ס"מ.

ב. השטח המקסימלי של המשולש הוא: $S = \frac{9 \cdot 9}{2} =$ 40.5 סמ"ר

פתרון מבחן מתכונת מס' 19

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן את מחיר הצ'יפס ב־x ואת מחיר ההמבורגר ב־y.

מחיר הצ'יפס במבצע היה $\frac{85x}{100} = 0.85x$

קיבלנו שתי משוואות:

$$\begin{cases} x + y = 42 \\ 0.85x + y = 39 \quad / (-1) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x + y = 42 \\ -0.85x - y = -39 \end{cases}$$

$$0.15x = 3 \quad / : 0.15$$

$$\boxed{x = 20}$$

התשובה: מחיר מנת צ'יפס לפני הוזלה היה 20 ש"ח.

פתרון שאלה 2

נבנה טבלה המתארת את הבעיה:

נסמן ב־x את מהירותה הרגילה של המכונית.

המהירות הגדולה ב־20% היא $\frac{120 \cdot x}{100} = 1.2x$

נמלא את הטבלה בעזרת הנוסחה: $\boxed{\text{מהירות} \cdot \text{זמן} = \text{דרך}}$

	מהירות V	**זמן t**	**דרך S**
בדרך כלל	x	$\frac{800}{x}$	800
יום אחד	x - 20 1.2x	$\frac{400}{x-20}$ $\frac{400}{1.2x}$	400 400

מאחר שהמכונית הגיעה 20 דקות מאוחר יותר, כדי להשוות בין הזמנים נוסיף 20 דקות (כלומר $\frac{20}{60}$ שעות) לזמן הקצר יותר (זה שבדרך כלל).

$$\frac{800}{x}+\frac{20}{60}=\frac{400}{x-200}+\frac{400}{1.2x} \quad / \cdot 60x\ (x-20)$$

$$48000\ (x-20)+20x\ (x-20)=24000x+20000\ (x-20)$$

$$48000x-960000+20x^2-400x=24000x+20000x-400000$$

$$20x^2+3600x-560000=0 \quad / : 20$$

$$x^2+180x-28000=0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $c = -28000 \quad b = 180 \quad a = 1$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2}=\frac{-180 \pm \sqrt{180^2-4 \cdot 1 \cdot (-28000)}}{2 \cdot 1}=\frac{-180 \pm \sqrt{144400}}{2}=\frac{-180+380}{2}$$

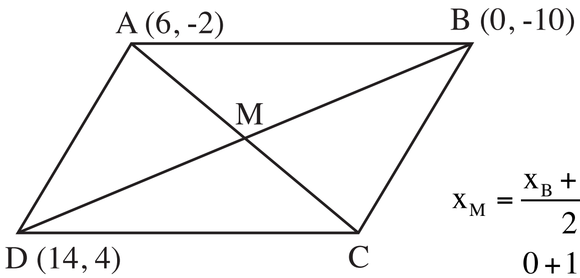
$$x_1=\frac{-180+380}{2}=\frac{200}{2}=100$$

$$x_2=\frac{-180-380}{2}=\frac{-560}{2}=-280 \leftarrow \text{נפסל}$$

התשובה: מהירותו הרגילה של המכונית היא 100 קמ"ש.

פתרון שאלה 3

א. האלכסונים במקבילית **חוצים** זה את זה.



נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \qquad y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$x_M = \frac{0+14}{2} = 7 \qquad y_M = \frac{-10+4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{M\ (7, -3)}$$

נקודה M היא גם אמצע AC ולכן:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$7 = \frac{6 + x_C}{2} \quad / \cdot 2 \qquad -3 = \frac{-2 + y_C}{2} \quad / \cdot 2$$

$$14 = 6 + x_C \qquad -6 = -2 + y_C$$

$$8 = x_C \qquad -4 = y_C$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{C\ (8, -4)}$$

ב. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (0-6)^2 + (-10+2)^2 = 36 + 64 = 100$$

$$d_{AB} = \sqrt{100} = 10$$

$$d_{AD}^2 = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = (14-6)^2 + (4+2)^2 = 64 + 36 = 100$$

$$d_{AD} = \sqrt{100} = 10$$

$$\downarrow$$

$$AB = AD$$

ABCD מעוין. מקבילית בעלת זוג צלעות סמוכות שוות היא מעוין.

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מאפס, כלומר כאשר $\boxed{x \neq 0}$.

ב. $\boxed{\text{בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0}}$

נגזור את הפונקציה:

$$y = x + \frac{4}{x}$$

ניעזר בנוסחה: $\frac{-a \cdot f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} = \left(\frac{a}{f(x)}\right)'$ ונקבל:

$$y' = 1 + \frac{-4}{x^2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0 = 1 - \frac{4}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = x^2 - 4$$

$$4 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 2} \quad \boxed{x = -2}$$

נציב את ערכי ה־x שקיבלנו בפונקציה **המקורית**:

$$y_{(2)} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$y_{(-2)} = -2 + \frac{4}{-2} = -4$$

קיבלנו את הנקודות $(2\ ,4)$ $(-2\ ,-4)$. כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בטבלה:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y'	+	0	–		–	0	+
y	↗	Max	↘		↘	Min	↗

נציב בטבלה את נקודות הקיצון ואת הנקודה שמצאנו בתחום ההגדרה. נבחר נקודות ביניהן ונציב את הנקודות שבחרנו **בנגזרת**. אם התוצאה חיובית – הפונקציה עולה ואם התוצאה שלילית – הפונקציה יורדת.

קיבלנו כי נקודות הקיצון הן: $\text{Min}\ (2\ ,4)$, $\text{Max}\ (-2\ ,-4)$.

ג. נשווה את משוואת הישר $y = 5$ והפונקציה $y = x + \frac{4}{x}$

$$\leftarrow \quad x + \frac{4}{x} = 5 \quad / \cdot x$$

$$x^2 + 4 = 5x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -5 \quad c = 4$.

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \rightarrow \quad (4\ ,\ 5)$$

$$x_2 = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad (1\ ,\ 5)$$

ד. $\boxed{\text{שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה}}$

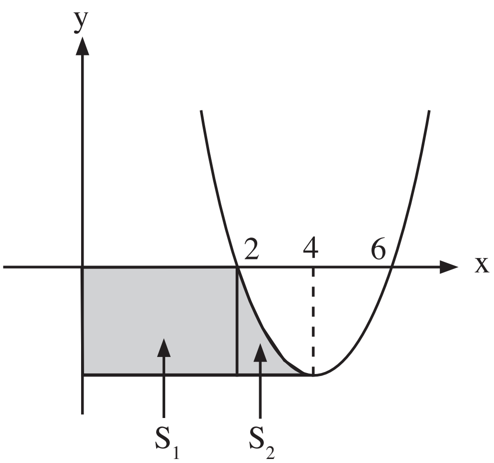
נציב את ערכי ה־x שקיבלנו בנגזרת:

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$y'_{(4)} = 1 - \frac{4}{4^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$y'_{(1)} = 1 - \frac{4}{1^2} = 1 - 4 = -3$$

פתרון שאלה 5



א. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־x: $y = 0$.

$$O = x^2 - 8x + 12$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -8 \quad c = 12$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \rightarrow \quad (6\ ,\ 0)$$

$$x_2 = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad (2\ ,\ 0)$$

ב. נמצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.

נציב $x = 4$ בפונקציה המקורית ונקבל: $f_{(4)} = 4^2 - 8 \cdot 4 + 12 = -4$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה

נגזור את הפונקציה: $f'(x) = 2x - 8$

נציב $x = 4$ בנגזרת: $f'(4) = 2 \cdot 4 - 8 = 0$

ניעזר בנוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$

נציב: $(4\ ,\ -4)$ ו־$m = 0$. $y + 4 = 0\ (x - 4)$

משוואת המשיק ← $\boxed{y = -4}$

נפצל את השטח לשני שטחים: S_1, S_2.

את S_1 נמצא בעזרת **אינטגרל** של ציר ה־x מעל המשיק בתחום שבין $x = 0$ ל־$x = 2$.

נעשה פונקציית הפרש (נחסר את המשיק מציר ה־x): $0 - (-4) = 4$

$$S_1 = \int_0^2 4\ dx = \left[4x\right]_0^2 = (4 \cdot 2) - (4 \cdot 0) = 8$$

(הערה: אפשר למצוא את S_1 גם בעזרת הנוסחה לחישוב שטח **מלבן**).

את S_2 נמצא בעזרת **אינטגרל** של הפונקציה מעל המשיק בתחום שבין $x = 2$ ל־$x = 4$.

נעשה פונקציית הפרש (נחסר את המשיק מהפונקציה):

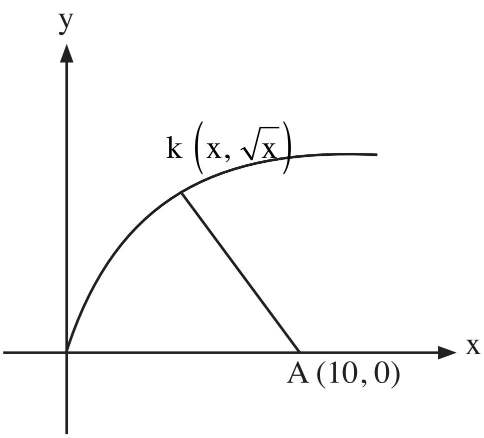
$$\left(x^2-8x+12\right)-(-4)=x^2-8x+16$$

$$S_2=\int_2^4\left(x^2-8x+16\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+16x\right]_2^4=\left(\frac{4^3}{3}-\frac{8\cdot4^2}{2}+16\cdot4\right)-\left(\frac{2^3}{3}-\frac{8\cdot2^2}{2}+16\cdot2\right)=$$

$$=\left(21\frac{1}{3}-64+64\right)-\left(2\frac{2}{3}-16+32\right)=21\frac{1}{3}-18\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$$

השטח הוא: $S_1+S_2=8+2\frac{2}{3}=10\frac{2}{3}$.

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את שיעור ה־x של הנקודה K.
הנקודה K נמצאת על הפונקציה $y=\sqrt{x}$ ולכן
ערך ה־y שלה הוא $\sqrt{x}$.

ניעזר בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:
$$d^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2$$
נציב את הנקודות A (10 , 0) $k\left(x,\sqrt{x}\right)$ ונקבל:

$$d_{AK}^2=\left(x-10\right)^2+\left(\sqrt{x}-0\right)^2$$

$$d_{AK}^2=\left(x-10\right)\left(x-10\right)+\left(\sqrt{x}\right)^2=x^2-10x-10x+100+x$$

$$d_{AK}^2=x^2-21x+100$$

$$\boxed{d_{AK}=\sqrt{x^2-21x+100}}$$

ב. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

$$d' = \frac{2x - 21}{2\sqrt{x^2 - 21x + 100}}$$

$$o = \frac{2x - 21}{2\sqrt{x^2 - 21x + 100}} \quad / \cdot 2\sqrt{x^2 - 21x + 100}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0 = 2x - 21$$

$$21 = 2x \quad / : 2$$

$$\boxed{10.5 = x}$$

כדי לבדוק כי מדובר באורך מינימלי ניעזר בנגזרת שנייה.

כדי למצוא את **סימן** הנגזרת השנייה מספיק לגזור רק את המונה: סימן $d'' = 2$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום**.

התשובה: אורך הקטע AK מינימלי כאשר $x = 10.5$.

פתרון מבחן מתכונת מס' 20

תשובות

פתרון שאלה 1

.

נסמן ב־x את מחיר המקפיא.

מחיר המקרר הוא $x + 500$. לאחר שמחירו עולה ב־20% יהיה מחירו החדש:

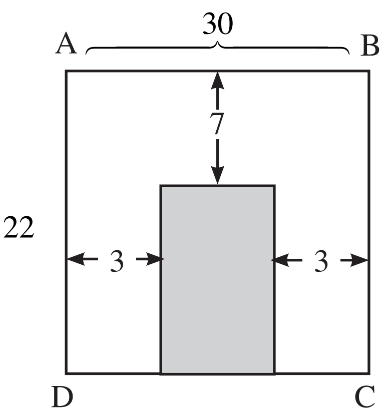
$$\frac{120\ (x+500)}{100} = 1.2\ (x+500)$$

נבנה משוואה:

$$5 \cdot 1.2(x+500) = 8 \cdot x$$
$$6x + 3000 = 8x$$
$$3000 = 2x \quad / : 2$$
$$\boxed{1500 = x}$$

התשובה: מחיר מקרר 2,000 ש"ח ומחיר מקפיא 1,500 ש"ח.

פתרון שאלה 2



א. אורך המלבן החדש $30 - 3 - 3 = 24$ ס"מ

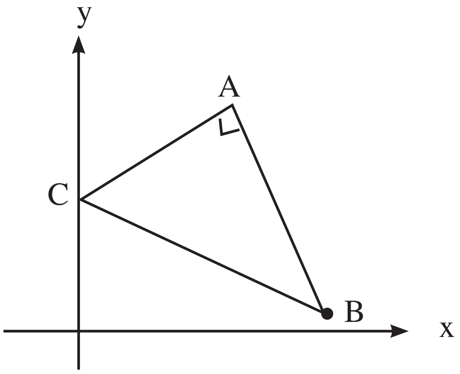
רוחב המלבן החדש $22 - 7 = 15$ ס"מ

נשתמש בנוסחה למציאת שטח מלבן: $S_{\text{מלבן}} = a \cdot b$

$S = 24 \cdot 15 = 360$ סמ"ר

ב. היקף המלבן החדש: $P_{\text{היקף}} = 24 + 15 + 24 + 15 = 78$ ס"מ

פתרון שאלה 3



א. נמצא את שיפוע AB בעזרת הנוסחה: $m\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 9}{12 - 8} = \frac{-8}{4} = -2$$

נתון $AC \perp AB$ ולכן: $m_{AC} = \dfrac{1}{2}$ (השיפוע **הפכי ונגדי**).

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 9 = \frac{1}{2}(x - 8)$$

$$y - 9 = \frac{1}{2}x - 4$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x + 5} \leftarrow AC$$ משוואת

קדקוד C נמצא על ציר ה־y ולכן: $x_C = 0$. נציב ונקבל:

$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 + 5 = 5$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{c\ (0, 5)}$$

ב. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2_{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (12 - 8)^2 + (1 - 9)^2 = 16 + 64 = 80 \rightarrow d_{AB} = \sqrt{80}$$

$$\rightarrow \boxed{AB = AC}$$

$$d^2_{AC} = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (0 - 8)^2 + (5 - 9)^2 = 64 + 16 = 80 \rightarrow d_{AC} = \sqrt{80}$$

ג.

$$d^2_{BC} = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (0 - 12)^2 + (5 - 1)^2 = 144 + 16 = 160 \rightarrow d_{BC} = \sqrt{160}$$

היקף $P_{ABC} = \sqrt{80} + \sqrt{80} + \sqrt{160} = 30.537$

פתרון שאלה 4

א. **בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־**0.

נגזור את הפונקציה $y=\sqrt{-x^2+8x-7}$. ניעזר בנוסחה:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'_{(x)}}{2\sqrt{f_{(x)}}}$$

$$y'=\frac{-2x+8}{2\sqrt{-x^2+8x-7}}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0=\frac{-2x+8}{2\sqrt{-x^2+8x-7}} \quad / \cdot 2\sqrt{-x^2+8x-7}$$

$$0=-2x+8$$

$$2x=8 \quad / \cdot 2$$

$$\boxed{x=4}$$

נציב $x=4$ בפונקציה המקורית:

$$y_{(4)}=\sqrt{-4^2+8\cdot 4-7}=\sqrt{9}=3$$

קיבלנו את נקודת הקיצון $(4\ ,3)$. כדי למצוא את סוג הקיצון נשתמש בנגזרת שנייה.

כדי למצוא את סימן הנגזרת השנייה מספיק לגזור רק את המונה: $y''=-2$ (סימן).

קיבלנו כי y'' **שלילי** ולכן מדובר בנקודת **מקסימום**.

ב. נציב בפונקציה המקורית את ערכי ה־x בקצות תחום ההגדרה:

$$y_{(1)}=\sqrt{-1^2+8\cdot 1-7}=0$$

$$y_{(7)}=\sqrt{-7^2+8\cdot 7-7}=0$$

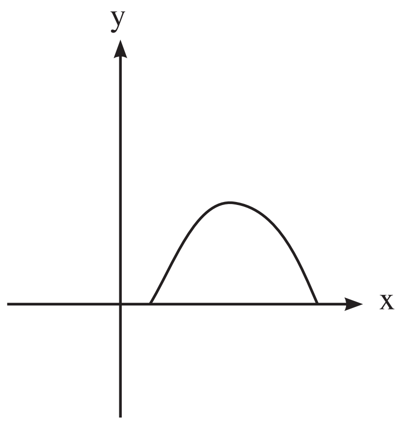
קיבלנו את הנקודות $(1\ ,0)$ $(7\ ,0)$.

ג. נסרטט סקיצה:

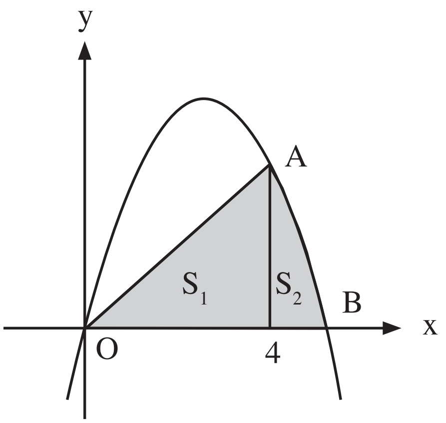
נציב את הנקודות הידועות: $(1\ ,0)$

$(7\ ,0)$

max $(4\ ,3)$



פתרון שאלה 5



א. נציב את הנקודה $A\ (4\ ,\ 8)$ בפונקציה: $f(x) = -x^2 + bx$

$8 = -4^2 + b \cdot 4$

$8 = -16 + 4b$

$24 = 4b \quad / : 4$

$\boxed{6 = b} \quad \rightarrow \quad \boxed{f(x) = -x^2 + 6x}$

ב. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־x: $y = 0$

$0 = -x^2 + 6x$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = -1 \quad b = 6 \quad c = 0$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-6 \pm 6}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-6+6}{-2} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \rightarrow \quad 0\ (0\ ,\ 0)$$

$$x_2 = \frac{-6-6}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6 \rightarrow \quad B\ (6\ ,\ 0)$$

ג. נמצא את שיפוע הישר AO בעזרת הנוסחה:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AO} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{8-0}{4-0} = 2$$

נמצא את משוואת הישר AO בעזרת הנוסחה:

נציב: $0\ (0\ ,\ 0) \quad m = 2$

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y = 0 = 2\ (x - 0)$$

$$\boxed{y = 2x}$$

נפצל את השטח לשני שטחים: S_1 , S_2.

את S_1 נמצא בעזרת הנוסחה לשטח משולש: $S = \frac{\text{גובה} \cdot \text{בסיס}}{2}$ $\qquad S_1 = \frac{x_A \cdot y_A}{2} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$

את S_2 נמצא בעזרת **אינטגרל** של הפרבולה מעל ציר ה־x בתחום שבין $x = 4$ ל־$x = 6$.

$$S = \int_4^6 \left(-x^2 + 6x\right) dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_4^6 = \left(\frac{-6^3}{3} + \frac{6 \cdot 6^2}{2}\right) - \left(\frac{-4^3}{3} + \frac{6 \cdot 4^2}{2}\right) =$$

$$= (-72 + 108) - \left(-21\frac{1}{3} + 48\right) = 36 - 26\frac{2}{3} = 9\frac{1}{3}$$

השטח הוא: $S_1 + S_2 = 16 + 9\frac{1}{3} = 25\frac{1}{3}$

פתרון שאלה 6

נתון: $x \cdot y = 48$ ולכן: $\boxed{y = \frac{48}{x}}$

נבטא את הסכום $x + 3y$:

$$S = x + 3y = x + 3 \cdot \frac{48}{x} = x + \frac{144}{x}$$

נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה: $\left(\frac{a}{f_{(x)}}\right)' = \frac{-a \cdot f'_{(x)}}{\left(f_{(x)}\right)^2}$

$$S' = 1 + \frac{-144}{x^2} = 1 - \frac{144}{x^2}$$

נשווה את הנגזרת ל־0:

$$0 = 1 - \frac{144}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = x^2 - 144$$

$$144 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$\boxed{12 = x}$ $\quad \boxed{x = -12}$ $\leftarrow$ המספרים חיוביים ולכן תשובה זו נפסלת

$\downarrow$

$$y = \frac{48}{12} = 4$$

כדי לבדוק שמדובר במינימום ניעזר בנגזרת השנייה:

$$S'' = \frac{144 \cdot 2x}{x^4} = \frac{288x}{x^4}$$

נציב $x = 12$ בנגזרת השנייה ונקבל:

$$S''_{(12)} = \frac{288 \cdot 12}{12^4} = \frac{1}{6}$$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום**.

התשובה: המספרים הם 4, 12.