פתרונות מלאים

למבחנים בחוברת 1, 2, 3, 4, 5

פתרון מבחן מתכונת מס׳ 1

תשובות

פתרון שאלה 1

נסמן ב־x מחיר כרטיס **ליציע** וב־y מחיר כרטיס **לאולם**.

נבנה שתי משוואות:

נוסיף 60 ש"ח למחיר הכרטיסים ליציע כי מחירם קטן יותר.

$$\begin{cases} 12x+10y=2040 \\ 4y=6x+60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x+10y=2040 \\ -6x+4y=60 \quad / \cdot 2 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 12x+10y=2040 \\ -12x+8y=120 \end{cases}$$

$$18y=2160 \quad / :18$$

$$\boxed{y=120}$$

נציב $y = 120$ במשוואה הראשונה ונקבל:

$$12x+10\cdot 120=2040$$

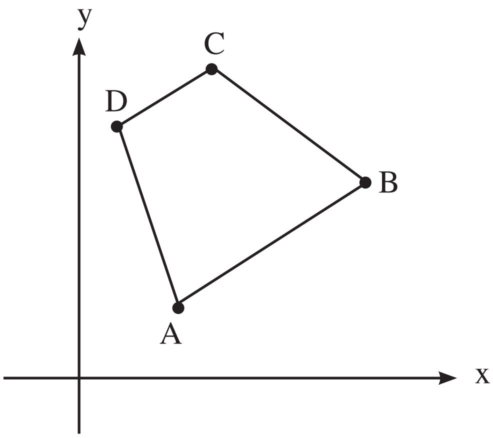
$$12x+1200=2040$$

$$12x=840 \quad / :12$$

$$\boxed{x=70}$$

התשובה: מחיר כרטיס לאולם 120 ש"ח ומחיר כרטיס ליציע 70 ש"ח.

פתרון שאלה 2



א. נשתמש בנוסחה למציאת שיפוע על פי שתי נקודות: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-2}{8-3} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\rightarrow m_{AB} = m_{CD} \rightarrow AB \parallel CD$$

$$m_{CD} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{8-10}{2-4} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{8-2}{2-3} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\rightarrow m_{AD} \neq m_{BC} \rightarrow AD \nparallel BC$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{10-7}{4-8} = \frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$$

ABCD טרפז. מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות והזוג השני **לא** מקבילות הוא טרפז.

ב. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות: $d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$$d^2_{AB} = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (8-3)^2 + (7-2)^2 = 25 + 25 = 50 \rightarrow d_{AB} = \sqrt{50}$$

$$d^2_{BC} = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (4-8)^2 + (10-7)^2 = 16 + 9 = 25 \rightarrow d_{BC} = \sqrt{25} = 5$$

$$d^2_{CD} = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2 = (2-4)^2 + (8-10)^2 = 4 + 4 = 8 \rightarrow d_{CD} = \sqrt{8}$$

$$d^2_{AD} = (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = (2-3)^2 + (8-2)^2 = 1 + 36 = 37 \rightarrow d_{AD} = \sqrt{37}$$

$$P_{\text{היקף}} = \sqrt{50} + 5 + \sqrt{8} + \sqrt{37} = 20.98$$

פתרון שאלה 3

א. נתונה משוואת המעגל: $(x-4)^2+(y+3)^2=25$

נציב את הנקודה $A(7\ ,\ 2)$ במשוואה: $(7-4)^2+(2+3)^2=9+25=34>25$

קיבלנו ערך הגדול מ־25 ולכן הנקודה נמצאת מחוץ למעגל.

ב. נקודות B ו־O נמצאות על ציר ה־x ולכן $y=0$. נציב ונקבל:

$$(x-4)^2+(0+3)^2=25$$
$$(x-4)(x-4)+9=25$$
$$x^2-4x-4x+16+9=25$$
$$x^2-8x=0$$

נוציא x כגורם משותף, ונקבל:

$$x(x-8)=0$$
$$x=0 \qquad x-8=0$$
$$x=8$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$0(0\ ,\ 0) \qquad B(8\ ,\ 0)$$

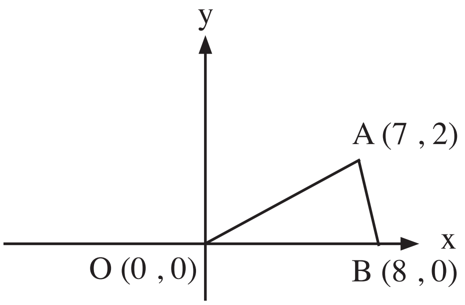
נקודות C ו־O נמצאות על ציר ה־y ולכן $x=0$. נציב ונקבל:

$$(0-4)^2+(y+3)^2=25$$
$$16+(y+3)(y+3)=25$$
$$16+y^2+3y+3y+9=25$$
$$y^2+6y=0$$

נוציא y כגורם משותף, ונקבל:

$$y(y+6)=0$$
$$y=0 \qquad y+6=0$$
$$y=-6$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$0(0\ ,\ 0) \qquad C(0\ ,\ -6)$$

ג. נשתמש בנוסחה למציאת שטח משולש:



$$S = \frac{\text{גובה} \cdot \text{בסיס}}{2}$$

$$S_{ABO} = \frac{BO \cdot y_A}{2} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$$

פתרון שאלה 4

א. תחילה נפשט את הפונקציה:

$$y = x\,(x + 1)^2 = x\,(x + 1)\,(x + 1) = x\,(x^2 + x + x + 1) =$$

$$y = x^3 + x^2 + x^2 + x = x^3 + 2x^2 + x$$

בנקודות הקיצון הנגזרת שווה ל־0:

נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל־0.

$$y' = 3x^2 + 4x + 1$$

$$0 = 3x^2 + 4x + 1$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 3 \quad b = 4 \quad c = 1$.

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6}$$

נציב את ערכי x בפונקציה המקורית ונקבל:

$$x_1 = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad y_1 - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+1\right)^2 = \frac{-4}{27}$$

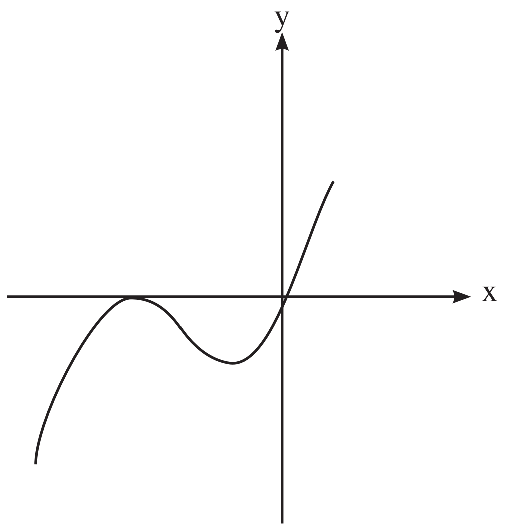
$$x_2 = \frac{-4-2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \quad \rightarrow \quad y_2 = -1(-1+1)^2 = 0$$

$$\downarrow$$

לפי הסרטוט הנתון אפשר לזהות את הנקודות: $B\,(-1\,,\,0) \qquad A\left(-\frac{1}{3}\,,\,-\frac{4}{27}\right)$

ב. $y = k$ הוא ישר המקביל לציר ה־x.

הוא חותך את הפונקציה בשלוש נקודות



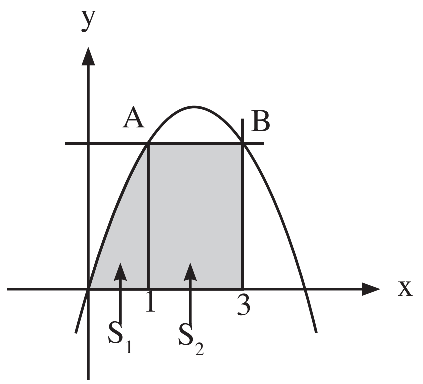
בתחום $\boxed{\frac{-4}{27} < k < 0}$

פתרון שאלה 5

א. נתון כי הנקודה $A\ (1\ ,\ 3)$ נמצאת על הישר $y = a$.

נציב $y_A = 3$ ולכן: $\boxed{a = 3}$

ב. נשווה את המשוואות:



$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 4x \\ y = 3 \end{cases}$$

$$3 = -x^2 + 4x$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $c = 3 \quad b = -4 \quad a = 1$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

הנקודה הנוספת היא:

$$x_1 = \frac{4+2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad \boxed{B\ (3\ ,\ 3)}$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad A\ (1\ ,\ 3)$$

ג. נפצל את השטח לשני שטחים: S_1 , S_2.

את S_1 נמצא בעזרת **אינטגרל** של הפונקציה מעל ציר ה־x בתחום שבין $x = 0$ ל־$x = 1$.

$$S = \int_0^1 \left(-x^2 + 4x\right)\, dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{-1^3}{3} + \frac{4 \cdot 1^2}{2}\right) - \left(\frac{-0^3}{3} + \frac{4 \cdot 0^2}{2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 2\right) - (0) = 1\frac{2}{3}$$

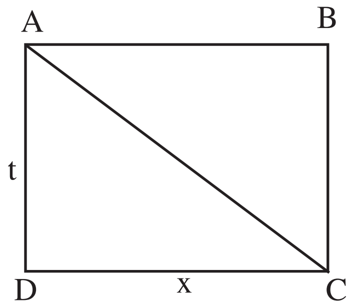
את S_2 נמצא בעזרת **אינטגרל** של הישר $y = 3$ מעל ציר ה־x בתחום שבין $x = 1$ ל־$x = 3$.

$$S_2 = \int_1^3 3dx = \left[3x\right]_1^3 = (3 \cdot 3) - (3 \cdot 1) = 9 - 3 = 6$$

(הערה: את S_2 אפשר למצוא גם בעזרת הנוסחה לשטח **מלבן**).

השטח הוא: $S_1 + S_2 = 1\frac{2}{3} + 6 = 7\frac{2}{3}$

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את אורך המלבן CD וב־t את רוחב המלבן AD.

היקף המלבן הוא 80 ס"מ ולכן:

$$2x + 2t = 80 \quad / 12$$

$$x + t = 40$$

$$\boxed{t = 40 - x}$$

משולש ACD הוא ישר־זווית. נשתמש במשפט פיתגורס:

$$(\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2 = (\text{יתר})^2$$

$$CD^2 + AD^2 = AC^2$$

נסמן $AC = y$.

$$x^2 + (40 - x)^2 = y^2$$

$$x^2 + (40 - x)(40 - x) = y^2$$

$$x^2 + 1600 - 40x - 40x + x^2 = y^2$$

$$2x^2 - 80x + 1600 = y^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{y = \sqrt{2x^2 - 80x + 1600}}$$

ב. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

$$y' = \frac{4x - 80}{2\sqrt{2x^2 - 80x + 1600}}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$O = \frac{4x - 80}{2\sqrt{2x^2 - 80x + 1600}} \quad / \cdot 2\sqrt{2x^2 - 80x + 1600}$$

$$O = 4x - 80$$

$$80 = 4x \quad / : 4$$

$$\boxed{20 = x}$$

כדי לבדוק כי מדובר במינימום ניעזר בנגזרת השנייה.

כדי למצוא את **סימן** הנגזרת השנייה מספיק לגזור רק את המונה: $y'' = 4$ סימן

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום**.

התשובה: כאשר $x = 20$, אורך אלכסון המלבן הוא מינימלי.

פתרון מבחן מתכונת מס' 2

תשובות

פתרון שאלה 1

נבנה טבלה שתתאר את הבעיה:

נסמן ב־x את מספר הק"ג מהסוג היקר שהירקן מכר וב־y את מספר הק"ג מהסוג הזול שהירקן מכר.

נמלא את הטבלה:

		כמות (ק"ג)	**מחיר ק"ג אחד**	**סה"כ כסף**
קניה		200	4	800
	זרק	40	0	0
מכירה	יקר	x	8	8x
	זול	y	5	5y

נבנה שתי משוואות.

משוואה לכמות:

משוואה למחיר:

$$\begin{cases} x + y + 40 = 200 \\ 8x + 5y = 800 + 180 \end{cases}$$

הירקן הרוויח בעיסקה 180 ש"ח ולכן הוא מכר את התפוחים במחיר של 980 ש"ח = 180 + 800.

$$\begin{cases} x + y = 160 \quad / \cdot (-5) \\ \underline{8x + 5y = 980} \end{cases}$$

$$+\begin{cases} -5x - 5y = -800 \\ \underline{8x + 5y = 980} \end{cases}$$

$$3x = 180 \quad / \cdot 3$$

$$\boxed{x = 60}$$

נציב $x = 60$ במשוואה הראשונה ונקבל:

$$60 + y = 160$$

$$\boxed{y = 100}$$

התשובה: הירקן מכר 60 ק"ג מהסוג היקר ו־100 ק"ג מהסוג הזול.

פתרון שאלה 2

נבנה טבלה המתארת את הבעיה:

נסמן ב־x את מהירותו הרגילה של הרוכב.

$\frac{1}{4}$ מהדרך היא 60 ק"מ $= 240 \cdot \frac{1}{4}$ ושאר הדרך היא 180 ק"מ $240 - 60 =$.

נמלא את הטבלה בעזרת הנוסחה: $\boxed{\text{מהירות} \cdot \text{זמן} = \text{דרך}}$

	מהירות V	**זמן t**	**דרך S**
תכנון	x	$\frac{240}{x}$	240
ביצוע – התחלה	x	$\frac{60}{x}$	60
ביצוע – עיכוב	0	1	0
ביצוע – המשך	x + 30	$\frac{180}{x+30}$	180

נשווה את הזמן המתוכנן לזמן בפועל:

$$\frac{240}{x} = \frac{60}{x} + 1 + \frac{180}{x+30}$$

נעשה מכנה משותף:

$$\frac{240}{x} = \frac{60}{x} + 1 + \frac{180}{x+30} \quad / \cdot x\,(x+30)$$

$$240\,(x+30) = 60\,(x+30) + x(x+30) + 180x$$

$$240x + 7200 = 60x + 1800 + x^2 + 30x + 180x$$

$$0 = 60x + 1800 + x^2 + 30x + 180x - 240x - 7200$$

$$0 = x^2 + 30x - 5400$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $c = -5400 \quad b = 30 \quad a = 1$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5400)}}{2 \cdot 1} = \frac{-30 \pm \sqrt{22500}}{2} = \frac{-30 \pm 150}{2}$$

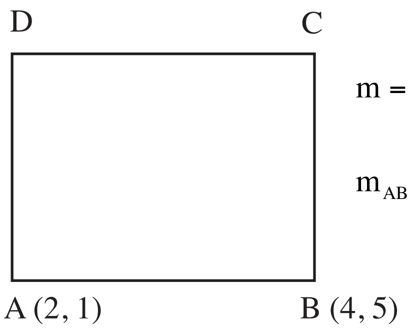
$$x_1 = \frac{-30 + 150}{2} = \frac{120}{2} = 60$$

$$x_2 = \frac{-30 - 150}{2} = \frac{-180}{2} = -90 \leftarrow \text{נפסל}$$

התשובה: מהירותו הרגילה של רוכב האופנוע היא 60 קמ"ש.

פתרון שאלה 3

א. נשתמש בנוסחה למציאת שיפוע על פי שתי נקודות:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

$AB \perp BC$ ולכן $m_{BC} = \frac{1}{2}$ (שיפוע הפכי ונגדי).

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר $y - y_1 = m(x - x_1)$.

ניעזר בנקודה $B\ (4, 5)$ ובשיפוע $m_{BC} = \frac{1}{2}$ ונקבל:

$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$

$$y - 5 = -\frac{1}{2}x + 2$$

משוואת BC $\leftarrow$ $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 7}$

ב. קדקוד C נמצא על משוואת BC $y=-\frac{1}{2}x+7$ ועל המשוואה $y = x - 8$.

נפתור מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+7 \\ \underline{y=x-8} \end{cases}$$

$$x-8=-\frac{1}{2}x+7$$

$$1.5x=15 \quad / : 1.5$$

$$\boxed{x=10}$$

נציב $x = 10$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$y=10-8=2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{C\ (10,\ 2)}$$

ג. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2=\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2$$

$$d^2{}_{AB}=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2=(4-2)^2+(5-1)^2=4+16=20$$

$$d_{AB}=\sqrt{20}$$

$$d^2{}_{BC}=\left(x_C-x_B\right)^2+\left(y_C-y_B\right)^2=(10-4)^2+(2-5)^2=36+9=45$$

$$d_{BC}=\sqrt{45}$$

נשתמש בנוסחה למציאת שטח מלבן:

$$S_{\text{מלבן}}=a\cdot b$$

$$S_{ABCD}=AB\cdot BC$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{20}\cdot\sqrt{45}=30$$

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה **שונה** מאפס וכאשר השורש הריבועי **לא** שלילי.

הפונקציה $y=\frac{4}{x}+2\sqrt{x}$ מוגדרת כאשר $x \neq 0$ וגם $0 \le x$.

תחום ההגדרה הוא: $\boxed{0<x}$

ב. **שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה.**

נגזור את הפונקציה $y = \frac{4}{x} + 2\sqrt{x}$. ניעזר בנוסחאות:

$$\boxed{\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = \frac{-a \cdot f'(x)}{\left(f(x)\right)^2}} \qquad \boxed{\left(\sqrt{(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{(x)}}}$$

$$y' = \frac{-4}{x^2} + \frac{2}{2\sqrt{x}}$$

נציב בנגזרת $x = 1$ ונקבל:

$$y'_{(1)} = \frac{4}{1^2} + \frac{2}{2 \cdot \sqrt{1}} = 4 + 1 = 5 = m$$

ג. כדי למצוא משוואת משיק צריך נקודה (x , y) ושיפוע m.

נציב $x = 1$ בפונקציה המקורית ונקבל:

$$y_{(1)} = \frac{4}{1} + 2 \cdot \sqrt{1} = 6$$

קיבלנו את הנקודה $(1 , 6)$ והשיפוע 5. ניעזר בנוסחה:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

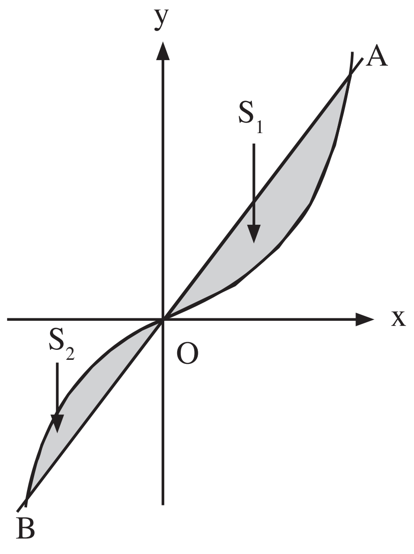
$$y - 6 = 5\ (x - 1)$$

$$y - 6 = 5x - 5$$

$$\boxed{y = 5x + 1}$$

פתרון שאלה 5

א. נשווה את המשוואות:



$$\begin{cases} f(x) = 4x \\ g(x) = x^3 \end{cases}$$

$$x^3 = 4x$$

$$x^3 - 4x = 0$$

נוציא x כגורם משותף:

$$x\left(x^2 - 4\right) = 0$$

זכור: אם $a \cdot b = 0$ אז $a = 0$ או $b = 0$

$\boxed{x = 0}$ או $x^2 - 4 = 0$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 2} \quad \boxed{x = -2}$$

נציב את ערכי ה־x בפונקציה f(x) ונקבל:

$x = 0 \rightarrow f(0) = 4 \cdot 0 = 0 \qquad O\,(0\ ,\ 0)$

$x = 2 \rightarrow f(2) = 4 \cdot 2 = 8 \qquad A\,(2\ ,\ 8)$

$x = -2 \rightarrow f(-2) = 4 \cdot (-2) = -8 \quad B\,(-2\ ,\ -8)$

ב. כדי למצוא את S_1 ניעזר **באינטגרל** של הישר מעל הפונקציה בתחום שבין $x = 0$ ל־$x = 2$.

נעשה פונקציית הפרש (נחסר את הפונקציה מהישר): $4x - x^3$.

$$S_1 = \int_0^2 \left(4x - x^3\right) dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left(\frac{4 \cdot 2^2}{2} - \frac{2^4}{4}\right) - \left(\frac{4 \cdot 0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right) = (8 - 4) - (0) = 4$$

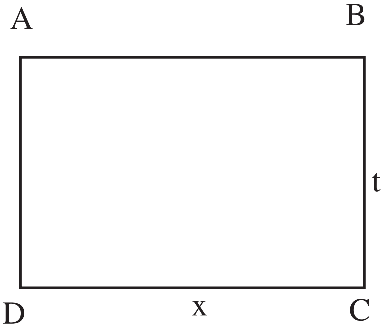
כדי למצוא את S_2 ניעזר **באינטגרל** של הפונקציה מעל הישר בתחום שבין $x = -2$ ל־$x = 0$.

נעשה פונקציית הפרש (נחסר את הישר מהפונקציה): $x^3 - 4x$

$$S_2 = \int_{-2}^0 \left(x^3 - 4x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_{-2}^0 = \left(\frac{0^4}{4} - \frac{4 \cdot 0^2}{2}\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4(-2)^2}{2}\right) = 0 - (4 - 8) = 4$$

השטח הוא: $S_1 + S_2 = 4 + 4 = 8$

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את אורך המלבן DC וב־t את רוחב המלבן BC.

ניעזר בנוסחה למציאת שטח מלבן:

$$S = a \cdot b$$
$$S = x \cdot t$$
$$64 = x \cdot t$$

נבודד את t.

$$\boxed{\frac{64}{x} = t}$$

נבטא את היקף המלבן:

$$y = 2x + 2t = 2x + 2 \cdot \frac{64}{x} = 2x + \frac{128}{x}$$

ב. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה:

$$\left(\frac{a}{f_{(x)}}\right)' = \frac{-a \cdot f'_{(x)}}{\left(f_{(x)}\right)^2}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$y' = 2 + \frac{-128}{x^2}$$

$$0 = 2 - \frac{128}{x^2} \quad / \cdot x^2$$

$$0 = 2x^2 - 128$$

$$128 = 2x^2 \quad / \quad :2$$

$$64 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$\boxed{x = 8}$ $\boxed{x = -8}$ ← אורכי הצלעות **חיוביים** ולכן פתרון זה נפסל

↓

$$t = \frac{64}{8} = 8$$

כדי לבדוק כי מדובר בהיקף **מינימלי** ניעזר בנגזרת שנייה:

$$y'' = \frac{128 \cdot 2x}{x^4} = \frac{256x}{x^4}$$

נציב $x = 8$ בנגזרת השנייה ונקבל:

$$y''_{(8)} = \frac{256 \cdot 8}{8^4} = \frac{2048}{4096} = \frac{1}{2}$$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום**.

התשובה: אורכי הצלעות הם: 8 ס"מ, 8 ס"מ.

ג. **כל** הצלעות שוות ולכן מדובר **בריבוע**.

פתרון מבחן מתכונת מס' 3

תשובות

פתרון שאלה 1

א. מחיר כדור מסוג א - x המחיר הכולל הוא: $4x + 8y$

מחיר כדור מסוג ב - y

ב. (1) מחיר כדור מסוג א לאחר ההוזלה: $x - 100$

מחיר כדור מסוג ב לאחר ההוזלה: $\frac{80y}{100} = 0.8y$.

(2) הסכום הכולל בזמן המבצע: $4(x - 100) + 8 \cdot 0.8y = 4x - 400 + 6.4y$

ג. נבנה מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} 4x + 8y = 2800 \\ \underline{4x - 400 + 6.4y = 2080} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 8y = 2800 \\ \underline{4x + 6.4y = 2480} \end{cases} \qquad / \cdot (-1) /$$

$$\begin{cases} 4x + 8y = 2800 \\ \underline{-4x - 6.4y = -2480} \end{cases}$$

$$1.6y = 320 \quad / : 1.6$$

$$\boxed{y = 200}$$

נציב $y = 200$ במשוואה הראשונה:

$$4x + 8 \cdot 200 = 2800$$

$$4x + 1600 = 2800$$

$$4x = 1200 \quad / : 4$$

$$\boxed{x = 300}$$

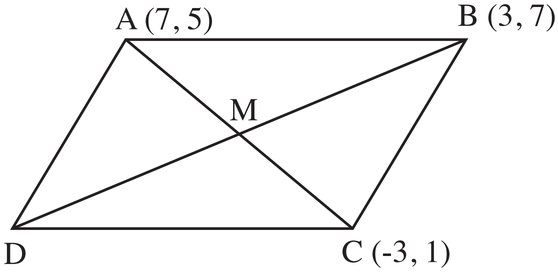
התשובה: מחיר כדור מסוג א (לפני המבצע): 300 שקלים.

מחיר כדור מסוג ב (לפני המבצע): 200 שקלים.

פתרון שאלה 2

א. האלכסונים במקבילית **חוצים** זה את זה.

נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:



$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_D = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y_M = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\downarrow$$

$$M\ (2, 3)$$

ב. M היא גם אמצע האלכסון BD ולכן:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \qquad y_M = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$2 = \frac{3 + x_D}{2} \quad / \cdot 2 \qquad 3 = \frac{7 + y_D}{2} \quad / \cdot 2$$

$$4 = 3 + x_D \qquad 6 = 7 + y_D$$

$$1 = x_D \qquad -1 = y_D$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D\ (1, -1)}$$

ג. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$d^2{}_{AB} = \left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 = (3-7)^2 + (7-5)^2 = 16 + 4 = 20$$

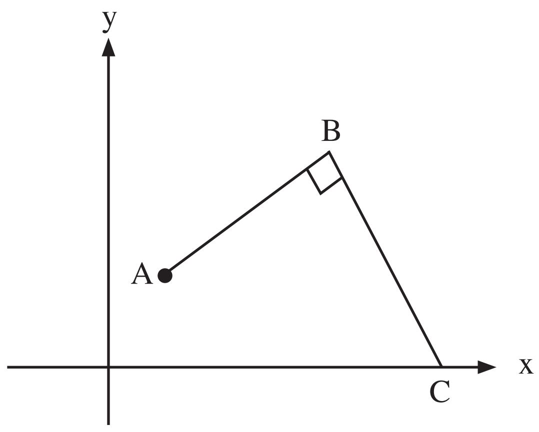
$$d_{AB} = \sqrt{20} = d_{CD}$$

$$d^2{}_{BC} = \left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2 = (-3-3)^2 + (1-7)^2 = 36 + 36 = 72$$

$$d_{BC} = \sqrt{72} = d_{AD}$$

היקף $P = d_{AB} + d_{CD} + d_{BC} + d_{AD} = \sqrt{20} + \sqrt{20} + \sqrt{72} + \sqrt{72} = 25.914$

פתרון שאלה 3



א. נמצא את שיפוע AB בעזרת הנוסחה:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8 - 4}{10 - 2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$AB \perp BC$ ולכן $m_{BC} = -2$ (שיפוע הפכי ונגדי).

נמצא את משוואת BC בעזרת הנוסחה $y - y_1 = m(x - x_1)$.

נציב $m = -2$ ונקודה $B(10, 8)$:

$$y - 8 = -2(x - 10)$$

$$y - 8 = -2x + 20$$

משוואת $BC \leftarrow \boxed{y = -2x + 28}$

ב. נקודה C נמצאת על ציר ה־x ולכן: $y_C = 0$. נציב ונקבל:

$$0 = -2x + 28$$

$$2x = 28 \quad / : 2$$

$$\boxed{x = 14} \rightarrow \boxed{C(14, 0)}$$

ג. AC הוא קוטר המעגל ולכן מרכז המעגל (M) נמצא באמצע הקטע AC.

נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$x_M = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8 \qquad y_M = \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M(8, 2)}$$

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת מעגל:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

נציב את M (8 , 2) ואת הנקודה A (2 , 4) ונקבל:

$$(2-8)^2+(4-2)^2=R^2$$

$$36+4=R^2$$

$$40=R^2$$

נציב $R^2 = 40$ ו־M (8 , 2) ונקבל את המשוואה:

$$\boxed{(x-8)^2+(y-2)^2=40}$$

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מ־0. כלומר: $\boxed{x \neq 0}$.

ב. האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה־x מתקבלת כאשר המכנה שווה ל־0, כלומר $\boxed{x=0}$.

ג. **בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0**

נגזור את הפונקציה $y=\frac{x-4}{3}+\frac{3}{x}$. ניעזר בנוסחה:

$$\left(\frac{a}{f(x)}\right)'=\frac{-a\cdot f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$y'=\frac{1}{3}+\frac{-3}{x^2}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0=\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2} \quad / \cdot 3x^2$$

$$0=x^2-9$$

$$9=x^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x=3} \quad \boxed{x=-3}$$

נציב את ערכי x שקיבלנו בפונקציה **המקורית**:

$$y_{(3)}=\frac{3-4}{3}+\frac{3}{3}=\frac{2}{3}$$

$$y_{(-3)}=\frac{-3-4}{3}+\frac{3}{-3}=-3\frac{1}{3}$$

קיבלנו את נקודות הקיצון: $\left(3\ ,\ \frac{2}{3}\right)$ $\left(-3\ ,\ -3\frac{1}{3}\right)$. כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בטבלה:

x	–4	–3	–1	0	1	3	4
y'	+	0	–		–	0	+
y	↗	Max	↘		↘	Min	↗

נציב בטבלה את נקודות הקיצון ואת הנקודה שמצאנו בתחום ההגדרה. נבחר נקודות ביניהן ונציב את הנקודות שבחרנו **בנגזרת**. אם התוצאה חיובית – הפונקציה עולה ואם התוצאה שלילית – הפונקציה יורדת.

קיבלנו את נקודות הקיצון: $\text{Min}\left(3\ ,\ \frac{2}{3}\right)\ ,\ \text{Max}\left(-3\ ,\ -3\frac{1}{3}\right)$

ג. כדי למצוא את נקודת החיתוך עם ציר ה־y נציב $x = 0$.

אבל ידוע שתחום ההגדרה הוא $x \neq 0$ ולכן אין נקודת חיתוך עם ציר ה־y.

כדי למצוא את נקודות החיתוך עם ציר ה־x נציב $y = 0$.

$$0 = \frac{x-4}{3} + \frac{3}{x} \quad / \cdot 3x$$
$$0 = x\,(x-4) + 9$$
$$0 = x^2 - 4x + 9$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a = 1 \quad b = -4 \quad c = 9$

נציב בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

הביטוי בשורש שלילי

ולכן אין פתרון למשוואה.

אין נקודות חיתוך עם ציר ה־x.

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-20}}{2} \leftarrow$$

פתרון שאלה 5

א. בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0 נציב $f'_{(x)} = 0$:

$$0 = -2x + 6$$
$$2x = 6$$
$$\boxed{x = 3}$$

ב. ערך הפונקציה $f_{(x)}$ בנקודת המקסימום הוא 1 ולכן נקודת המקסימום היא $(3\ ,\ 1)$.

כדי למצוא את הפונקציה $f(x)$ ניעזר **באינטגרל** של הנגזרת.

$$f(x) = \int(-2x+6)dx = \frac{-2x^2}{2} + 6x + c = -x^2 + 6x + c$$

נציב את הנקודה (1 , 3) ונקבל:

$$1 = -3^2 + 6 \cdot 3 + c$$

$$1 = -9 + 18 + c$$

$$\boxed{-8 = c} \quad \rightarrow \quad \boxed{f(x) = -x^2 + 6x - 8}$$

ג. בנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־x: $y = 0$

$$0 = -x^2 + 6x - 8$$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $c = -8 \quad b = 6 \quad a = -1$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$$

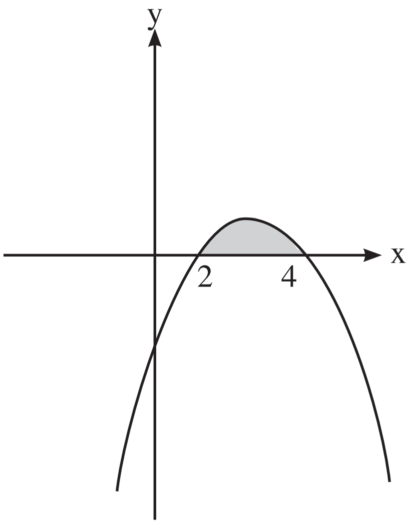
$$x_1 = \frac{-6 + 2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-6 - 2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

התשובה: נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה־x הן: $(2\ ,0)$ $(4\ ,0)$.

ד. נסרטט סקיצה של הפונקציה.

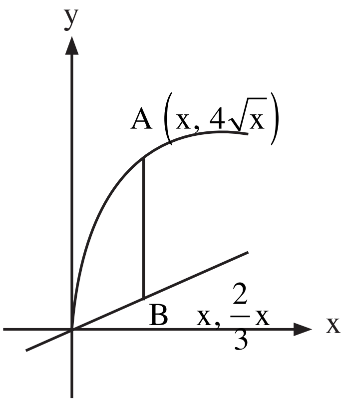
כדי למצוא את השטח המודגש יש להעזר **באינטגרל**.



$$\int_2^4 \left(-x^2 + 6x - 8\right)dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 8x\right]_2^4 = \left(\frac{(-4)^3}{3} + \frac{6 \cdot 4^2}{2} - 8\ \text{б}4\right) - \left(\frac{-2^3}{3} + \frac{6 \cdot 2^2}{2} - 8 \cdot 2\right) =$$

$$= \left(-21\frac{1}{3} + 48 - 32\right) - \left(-2\frac{2}{3} + 12 - 16\right) = -5\frac{1}{3} - \left(-6\frac{2}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$$

פתרון שאלה 6



א. נסמן ב־x את שיעור ה־x של הנקודה A.

הנקודה A נמצאת על הפונקציה $y = 4\sqrt{x}$

ולכן שיעור ה־y שלה הוא $4\sqrt{x}$.

AB מקביל לציר ה־y ולכן $x_B = x_A = x$.

הנקודה B נמצאת על הפונקציה $y = \frac{2}{3}x$ ולכן שיעור ה־y שלה הוא $\frac{2}{3}x$.

אורך הקטע AB הוא: $\boxed{d = 4\sqrt{x} - \frac{2}{3}x}$.

ב. נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

$$d' = \frac{4 \cdot 1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3} = \frac{4}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{3}$$

$$d' = \frac{12 - 4\sqrt{x}}{6\sqrt{x}}$$

נשווה את הנגזרת ל־0.

$$0 = \frac{12 - 4\sqrt{x}}{6\sqrt{x}} \quad / \cdot 6\sqrt{x}$$

$$0 = 12 - 4\sqrt{x}$$

$$4\sqrt{x} = 12 \quad / : 4$$

$$\sqrt{x} = 3 \quad / (\ \ )^2$$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל: $\boxed{x = 9}$

כדי לבדוק כי מדובר במקסימום ניעזר בנגזרת השנייה.

כדי למצוא את **סימן** הנגזרת השנייה מספיק לגזור רק את **המונה**.

$$\text{סימן } d'' = \frac{-4 \cdot 1}{2\sqrt{x}}$$

נציב $x = 9$ בנגזרת השנייה ונקבל:

$$\text{סימן } d''(g) = \frac{-4}{2\sqrt{9}} = \frac{-4}{6}$$

הנגזרת השנייה **שלילית** ולכן מדובר **במקסימום**.

נציב $x = 9$ בפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ ונקבל:

$$f(9) = 4\sqrt{9} = 4 \cdot 3 = 12$$

התשובה: שיעורי הנקודה A צריכים להיות (12 , 9).

פתרון מבחן מתכונת מס' 4

תשובות

פתרון שאלה 1

.

נרשום את הנתונים בטבלה:

		כמות	מחיר חולצה אחת	סה"כ כסף
קניה		x	y	400
מכירה	זרק	3	0	0
	הפסד	7	y - 4	7 (y - 4)
	רווח	x - 10	1.25y	1.25y (x-10)

נבנה שתי משוואות:

הסוחר הפסיד 16 שקלים ולכן מכר את כל החולצות ב-384 שקלים:

$$\begin{cases} xy = 400 \\ 7(y-4) + 1.25y(x-10) = 384 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 400 \\ 7y - 28 + 1.25\mathbf{xy} - 12.5y = 384 \end{cases}$$

נציב $xy = 400$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$7y - 28 + 1.25 \cdot 400 - 12.5y = 384$$

$$7y - 28 + 500 - 12.5y = 384$$

$$-5.5y = -88 \quad / : (-5.5)$$

$$\boxed{y = 16}$$

נציב $y = 16$ במשוואה הראשונה:

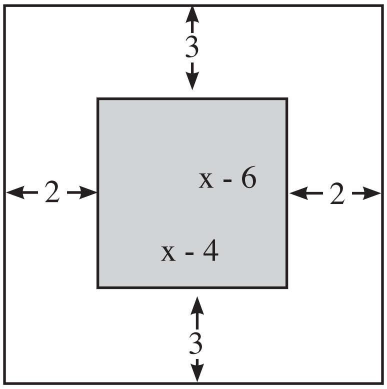
$$x \cdot 16 = 400 \quad / : 16$$

$$\boxed{x = 25}$$

התשובה: הסוחר קנה 25 חולצות.

פתרון שאלה 2

א. אם אורך צלע הריבוע x אז אורך השטח המודפס יהיה $x-2-2=x-4$ ורוחבו $x-3-3=x-6$.



נשתמש בנוסחה למציאת שטח מלבן:

$S_{\text{מלבן}} = a \cdot b$

$S_{\text{מודפס}} = (x-4)(x-6) = x^2 - 6x - 4x + 24$

$\boxed{S = x^2 - 10x + 24}$

ב.

$x^2 - 10x + 24 = 255$

$x^2 - 10x - 231 = 0$

קיבלנו משוואה ריבועית שבה: $a=1 \quad b=-10 \quad c=-231$

נשתמש בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-231)}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{1024}}{2} = \frac{10 \pm 32}{2}$$

$$x_1 = \frac{10+32}{2} = \frac{42}{2} = 21$$

$$x_2 = \frac{10-32}{2} = \frac{-22}{2} = -11 \leftarrow \text{נפסל}$$

התשובה: ממדי הדף הם 21 ס"מ / 21 ס"מ.

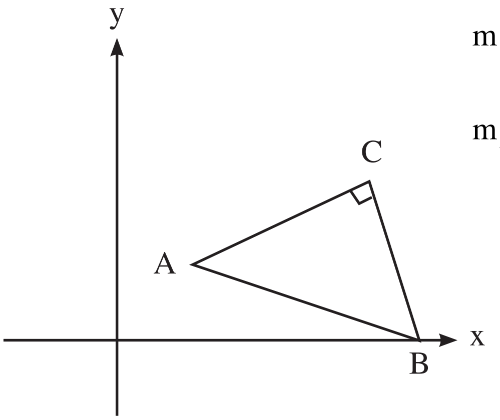
פתרון שאלה 3

א. כדי למצוא את שיפוע AC נשתמש בנוסחה

למציאת שיפוע על פי שתי נקודות:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AC} = \frac{6-3}{9-3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



לישרים מאונכים יש שיפוע **הפכי ונגדי** ולכן $m_{BC} = -2$.

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

נציב: $m_{BC} = -2$, $C\ (9, 6)$ ונקבל:

$$y - y_1 = m\left(x - x_1\right)$$

$$y - 6 = -2(x - 9)$$

$$y - 6 = -2x + 18$$

$$\boxed{y = -2x + 24}$$

ב. קדקוד B נמצא על ציר ה־x ולכן: $y_B = 0$. נציב ונקבל:

$$0 = -2x + 24$$

$$2x = 24 \quad / : 2$$

$$\boxed{x = 12} \quad \rightarrow \quad B\ (12, 0)$$

ג. נשתמש בנוסחה למציאת מרחק בין שתי נקודות:

$$d^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2$$

$$d_{AC}^2 = \left(x_C - x_A\right)^2 + \left(y_C - y_A\right)^2 = (9-3)^2 + (6-3)^2 = 36 + 9 = 45 \quad / \sqrt{\ }$$

$$d_{AC} = \sqrt{45}$$

$$d_{BC}^2 = \left(x_C - x_B\right)^2 + \left(y_C - y_B\right)^2 = (9-12)^2 + (6-0)^2 = 9 + 36 = 45 \quad / \sqrt{\ }$$

$$d_{BC} = \sqrt{45}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{AC = BC}$$

ד. נשתמש בנוסחה לחישוב שטח משולש:

$$S = \frac{\text{גובה} \cdot \text{בסיס}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}}{2} = 22.5$$

פתרון שאלה 4

א. **שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה.**

נגזור את הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - 8x + k}$. ניעזר בנוסחה:

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$y' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + k}}$$

נציב בנגזרת $x = 0$ ונשווה אותה ל־ $-\frac{4}{7}$.

$$-\frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 0 - 8}{2\sqrt{0^2 - 8 \cdot 0 + k}}$$

$$-\frac{4}{7} = \frac{-8}{2\sqrt{k}} \quad / \cdot 14\sqrt{k}$$

$$-8\sqrt{k} = -56 \quad / : (-8)$$

$$\sqrt{k} = 7 \quad / (\,)^2$$

נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל:

$$\boxed{k = 49}$$

ב. קיבלנו את הפונקציה $y = \sqrt{x^2 - 8x + 49}$.

בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0.

נשווה את הנגזרת ל־0:

$$y' = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 49}}$$

$$0 = \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 49}} \quad / \cdot 2\sqrt{x^2 - 8x + 49}$$

$$0 = 2x - 8$$

$$8 = 2x \quad / : 2$$

$$\boxed{4 = x}$$

נציב $x = 4$ בפונקציה המקורית ונקבל:

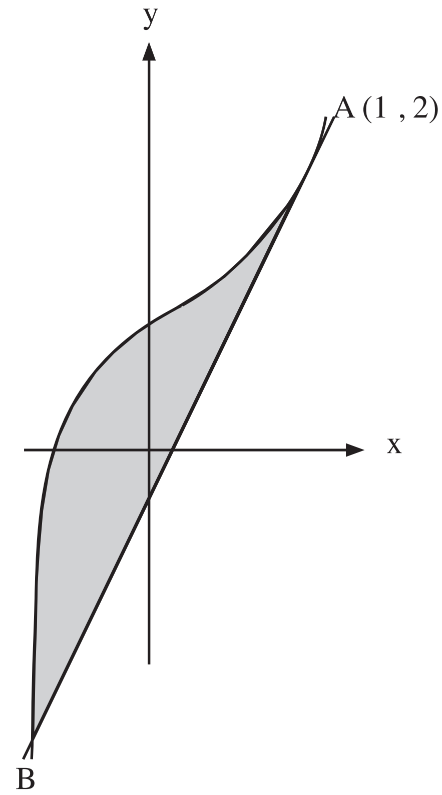
$$y_{(4)} = \sqrt{4^2 - 8 \cdot 4 + 49} = \sqrt{33}$$

נקודת הקיצון היא $\left(4 \,,\, \sqrt{33}\right)$. כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בנגזרת שנייה.

כדי למצוא את סימן הנגזרת השנייה מספיק לגזור רק את המונה: $y'' = 2$ (סימן).

קיבלנו כי y'' **חיובי** ולכן מדובר בנקודת **מינימום**.

פתרון שאלה 5



א. נציב את הנקודה $A\ (1\ ,\ 2)$ בפונקציה:

$$y = x^3 + a$$
$$2 = 1^3 + a$$
$$\boxed{1 = a} \rightarrow \boxed{y = x^3 + 1}$$

ב. כדי למצוא משוואת משיק יש צורך בשיפוע ובנקודה $(x\ ,\ y)$.

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה = הנגזרת בנקודה

נגזור את הפונקציה:

$$y' = 3x^2$$

נציב $x = 1$ בנגזרת

$$y'_{(1)} = 3 \cdot 1^2 = 3$$

ניעזר בנוסחה למציאת משוואת ישר:

$$y - y_1 = m\ (x - x_1)$$

נציב: $(1\ ,\ 2)$ $m = 3$ ונקבל:

$$y - 2 = 3\ (x - 1)$$
$$y - 2 = 3x - 3$$
$$\boxed{y = 3x - 1}$$

ג. כדי למצוא את השטח ניעזר **באינטגרל** של הפונקציה מעל המשיק בתחום שבין $x = -2$ ל־$x = 1$.

נעשה פונקציית הפרש (נחסר את המשיק מהפונקציה):

$$\left(x^3+1\right)-(3x-1)=x^3+1-3x+1=x^3-3x+2$$

$$S=\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+2\right)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\left(\frac{1^4}{4}-\frac{3\cdot 1^2}{2}+2\cdot 1\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{3\,(-2)^2}{2}+2\cdot(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)-(-6)=6\frac{3}{4}$$

פתרון שאלה 6

נסמן את שני המספרים ב־x וב־t.

$$x\cdot t=16$$

נבודד את t:

$$\boxed{t=\frac{16}{x}}$$

נבטא את סכום הריבועים:

$$y=x^2+t^2=x^2+\left(\frac{16}{x}\right)^2=x^2+\frac{256}{x^2}$$

נגזור את הפונקציה. ניעזר בנוסחה:

$$\left(\frac{a}{f_{(x)}}\right)'=\frac{-a\cdot f'_{(x)}}{\left(f_{(x)}\right)^2}$$

$$y'=2x+\frac{-256\cdot 2x}{x^4}$$

$$y'=2x-\frac{512x}{x^4}=2x-\frac{512}{x^3}$$

נשווה את הנגזרת ל־0:

$$0=2x-\frac{512}{x^3}\quad /\cdot x^3$$

$$0=2x^4-512$$

$$512=2x^4\quad /:2$$

$$256=x^4\quad /\sqrt[4]{\ }$$

$\boxed{x=4}$ $\boxed{x=-4}$ $\leftarrow$ המספרים **חיוביים** ולכן פתרון זה נפסל

$\downarrow$

$$t=\frac{16}{4}=4$$

כדי לבדוק כי מדובר בסכום **מינימלי** ניעזר בנגזרת השנייה:

$$y'' = 2 - \frac{-512 \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$y'' = 2 + \frac{1536x^2}{x^6} = 2 + \frac{1536}{x^4}$$

נציב $x = 4$ בנגזרת השנייה ונקבל:

$$y''_{(4)} = 2 + \frac{1536}{4^4} = 8$$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר **במינימום.**

התשובה: המספרים צריכים להיות 4 , 4.

פתרון מבחן מתכונת מס' 5

תשובות

פתרון שאלה 1

.

נרשום את הנתונים בטבלה

	מספר בקבוקים	מחיר בקבוק אחד	סה"כ כסף
קיוסק	x	y	72
סופרמרקט	$x + 3$	$0.8y$	72

מחיר בקבוק מים בסופרמרקט נמוך ב-20% ממחירו בקיוסק: $\frac{80 \cdot y}{100} = 0.8y$

נבנה מערכת של שתי משוואות:

$$\begin{cases} xy = 72 \\ \underline{0.8y(x+3) = 72} \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 72 \\ \underline{0.8\mathbf{xy} + 2.4y = 72} \end{cases}$$

נציב $xy = 72$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$0.8 \cdot 72 + 2.4y = 72$$
$$57.6 + 2.4y = 72$$
$$2.4y = 14.4 \quad / : 2.4$$
$$\boxed{y = 6}$$

נציב $y = 6$ במשוואה הראשונה:

$$6x = 72 \quad / : 6$$
$$\boxed{x = 12}$$

התשובות:

א. שחר קנה 12 בקבוקים בקיוסק.

ב. מחיר כל בקבוק מים מינרלים בקיוסק הוא 6 שקלים.

פתרון שאלה 2

א. נבנה טבלה המתארת את הבעיה:

נסמן ב־x את מהירות הולך הרגל ה־I.

נמלא את הטבלה בעזרת נוסחה: $\boxed{\text{מהירות} \cdot \text{זמן} = \text{דרך}}$

	מהירות V	**זמן t**	**דרך S**
הולך I	x	6	6x
הולך II	3x	6	18x

סך כל המרחק ששני הולכי הרגל עברו ב־6 שעות הוא 48 ק"מ ולכן:

$$6x + 18x = 48$$
$$24x = 48 \quad / : 24$$
$$\boxed{x = 2}$$

התשובה: מהירות הולך רגל I – 2 קמ"ש והולך רגל II – 6 קמ"ש.

ב. נסמן ב־t את הזמן שלוקח להולך רגל II להגיע ל־B.

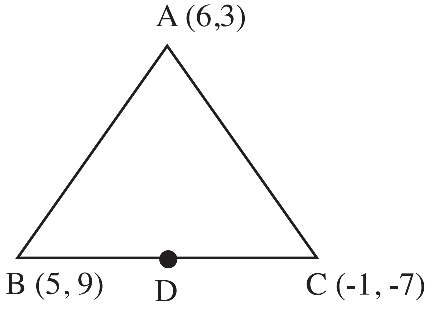
נשתמש בנוסחה: $\boxed{\text{מהירות} \cdot \text{זמן} = \text{דרך}} \leftarrow$ ק"מ$24 = 6 \cdot t \quad / : 6$

$\boxed{t = 4}$ שעות

פתרון שאלה 3

א. נתון: $B\,(5, 9) \quad C\,(-1, -7)$

נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:



$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} \qquad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$x_D = \frac{5 - 1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y_D = \frac{9 - 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\downarrow$$

$$D\,(2, 1)$$

ב. נשתמש בנוסחה למציאת שיפוע על פי שתי נקודות:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{1-3}{2-6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

נשתמש בנוסחה למציאת משוואת ישר על פי שיפוע ונקודה:

נתון: $m_{AD} = \frac{1}{2}$ $A(6, 3)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}x - 3$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x}$$

ג. נשתמש בנוסחה למציאת אמצע קטע:

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_D}{2}$$

$$x_M = \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad y_M = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{M(4, 2)}$$

פתרון שאלה 4

א. בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0

נגזור את הפונקציה $y = \frac{X}{A} + \frac{7}{x}$. ניעזר בנוסחה: $\left(\frac{a}{f(x)}\right)' = \frac{-a \cdot f'(x)}{(f(x))^2}$

נציב $x = 7$ ו־$y' = 0$.

$$y' = \frac{1}{A} + \frac{-7}{x^2} = \frac{1}{A} - \frac{7}{x^2}$$

$$0 = \frac{1}{A} - \frac{7}{7^2}$$

$$0 = \frac{1}{A} - \frac{7}{49} \quad / \cdot 49A$$

$$0 = 49 - 7A$$

$$7A = 49 \quad / : 7$$

$$\boxed{A = 7}$$

הפונקציה שהתקבלה היא: $y = \frac{x}{7} + \frac{7}{x}$.

ב. נגזור את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל־0:

$$y' = \frac{1}{7} + \frac{-7}{x^2} = \frac{1}{7} - \frac{7}{x^2}$$

$$0 = \frac{1}{7} - \frac{7}{x^2} \quad / \cdot 7x^2$$

$$0 = x^2 - 49$$

$$49 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$$

$$\boxed{x = 7} \quad \boxed{x = -7}$$

נציב את ערכי ה־x שקיבלנו במשוואה **המקורית**:

$$y_{(7)} = \frac{7}{7} + \frac{7}{7} = 2$$

$$y_{(-7)} = \frac{-7}{7} + \frac{7}{-7} = -2$$

קיבלנו את נקודות הקיצון: (2 , 7), (2– , 7–). כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בטבלה:

x	–8	–7	–1	0	1	7	8
y'	+	0	_		–	0	+
y	↗	Max	↘		↘	Min	↗

נציב בטבלה את נקודות הקיצון ואת הנקודה שמצאנו בתחום ההגדרה. נבחר נקודות ביניהן ונציב את הנקודות שבחרנו **בנגזרת**. אם התוצאה חיובית – הפונקציה עולה ואם התוצאה שלילית – הפונקציה יורדת.

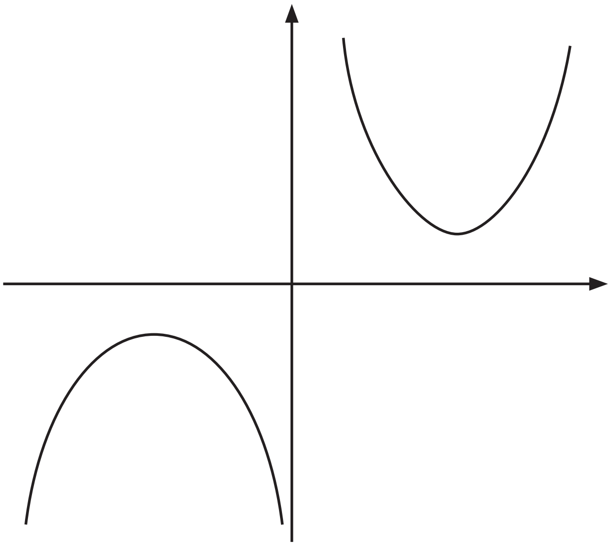
קיבלנו כי נקודות הקיצון הן: Min (7 , 2), Max (–7 , –2).

ג. הפונקציה מוגדרת כאשר המכנה שונה מאפס, כלומר: $\boxed{x \neq 0}$.

ד. האסימפטוטה של הפונקציה המאונכת לציר ה־x מתקבלת כאשר המכנה שווה ל־0.

האסימפטוטה היא $\boxed{x = 0}$.

ה. נסרטט סקיצה:



פתרון שאלה 5

א. $\boxed{\text{בנקודות הקיצון של הפונקציה, הנגזרת שווה ל־0}}$

נגזור את הפונקציה $y = x^2 - 6x + 12$:

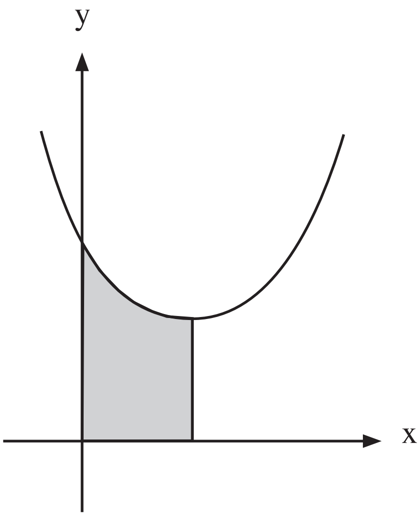
$y' = 2x - 6$

נשווה את הנגזרת ל־0:

$0 = 2x - 6$

$6 = 2x \quad / : 2$

$\boxed{3 = x}$



נציב $x = 3$ בפונקציה המקורית $y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12 = 3$.

כדי למצוא את סוג הקיצון ניעזר בנגזרת שנייה:

$y'' = 2$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר בנקודת מינימום. $\leftarrow$ $\boxed{Min\ (3\ ,\ 3)}$

ב. משוואת האנך לציר ה־x היא $\boxed{x = 3}$.

ג. נמצא את השטח בעזרת **אינטגרל** של הפונקציה מעל ציר ה־x בתחום שבין $x = 0$ ל־$x = 3$.

$$S=\int_0^3\left(x^2-6x+12\right)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+12x\right]_0^3=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{6\cdot 3^2}{2}+12\cdot 3\right)-\left(\frac{0^3}{3}-\frac{6\cdot 0^2}{2}+12\cdot 0\right)=$$
$$=(9-27+36)-(0)=18$$

התשובה: השטח הוא **18**.

פתרון שאלה 6

נסמן את שיעור ה־x של נקודה A ב־x.

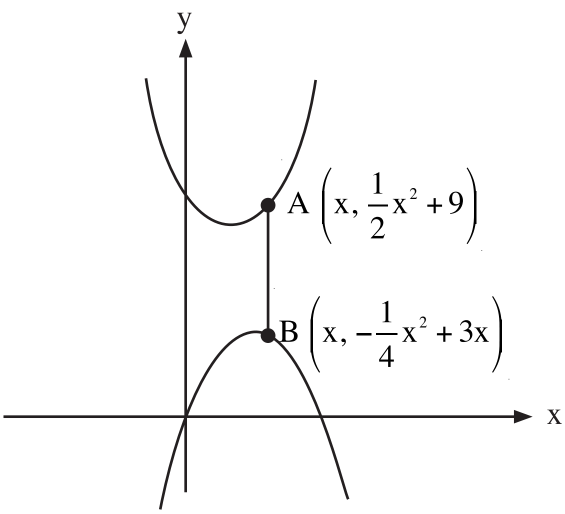
נקודה A נמצאת על הפרבולה $y=\frac{1}{2}x^2+9$

ולכן שיעור ה־y שלה הוא: $\frac{1}{2}x^2+9$.

AB מקביל לציר ה־y ולכן: $x_B = x_A = x$.

נקודה B נמצאת על הפרבולה $y=-\frac{1}{4}x^2+3x$

ולכן שיעור ה־y שלה הוא $-\frac{1}{4}x^2+3x$.



אורך הקטע AB הוא:

$$d=y_A-y_B=\frac{1}{2}x^2+9-\left(-\frac{1}{4}x^2+3x\right)$$
$$d=\frac{1}{2}x^2+9+\frac{1}{4}x^2-3x$$
$$d=\frac{3}{4}x^2-3x+9$$

נגזור את פונקציית אורך הקטע ונשווה את הנגזרת ל־0:

$$d' = 1.5x - 3 = 0$$
$$1.5x = 3 \quad / : 1.5$$
$$\boxed{x = 2}$$

כדי להראות שמדובר במינימום ניעזר בנגזרת שנייה:

$$d'' = 1.5$$

הנגזרת השנייה **חיובית** ולכן מדובר באורך קטע **מינימלי**.

נחשב את אורך הקטע:

$$d_{(2)} = \frac{3}{4} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 9 = 6$$

התשובה: אורך הקטע המינימלי הוא 6.