מבחן מקורי

פרק א : סדרות, טריגונומטריה במרחב (סה"כ: 33.3 נקודות)
ענו על **אחת** מבין השאלות 1-2 .

שאלה 1

סדרות

נתונות שלוש סדרות:
סדרה הנדסית אינסופית יורדת b_n,
סדרה c_n מורכבת מאיברי הסדרה b_n, הנמצאים במקומות זוגיים,
וסדרה z_n המוגדרת על ידי $z_n = \frac{c_n}{b_n}$
הסכום של סדרה b_n הוא 12, הסכום של סדרה c_n הוא 4.
הוכיחו כי סדרה z_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת, ומצאו את סכומה.

תשובה

<u>סכום הסדרה z_n הוא 1.</u>

פתרון

ברור כי גם הסדרה c_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6\ldots\ldots \\ & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & c_1 & & c_2 & & c_3 \end{array}$$

אם מנת הסדרה b_n היא q, אז $c_1=b_2=b_1q$, כאשר מנת הסדרה c_n היא $\frac{c_2}{c_1} = \frac{b_4}{b_2} = q^2$

שלבי הפתרון:
1. נמצא את b_1 ואת q.
2. נרשום נוסחאות לאיבר הכללי בסדרות b_n, c_n.
3. נרשום נוסחה לאיבר הכללי בסדרה z_n.
4. נבדוק כי z_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת, ונמצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.
5. נחשב את סכום הסדרה z_n.

1. את הנתונים "סכום של סדרה $\mathbf{b_n}$ הוא 12, סכום של סדרה $\mathbf{c_n}$ הוא 4", אפשר לרשום כמערכת של שתי *משוואות עם שני משתנים b_1 ו-q-*

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q}=12 \\ \dfrac{b_1 q}{1-q^2}=4 \end{cases}$$

נחלק את אגפי המשוואה הראשונה באגפי המשוואה השנייה: $\frac{1+q}{q}=3$ מכאן $q=\frac{1}{2}$

<u>$b_1=12(1-q)=6$</u>

2. $c_n=3\cdot\frac{1}{4^{n-1}}$, $b_n=6\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$

3. $z_n=\frac{c_n}{b_n}=\frac{3}{4^{n-1}}\cdot\frac{2^{n-1}}{6}=\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{2^{n-1}}{2}=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}$

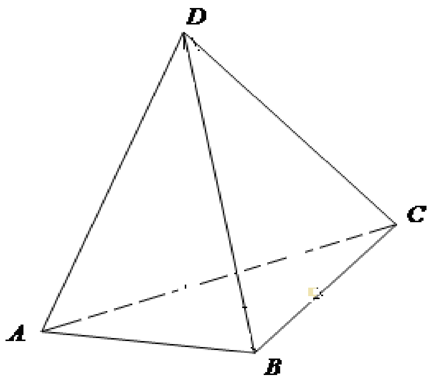
4. $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{1}{2^{n+1}}\cdot 2^n=\frac{1}{2}$ ברור כי z_n היא סדרה הנדסית אינסופית יורדת. מנת הסדרה היא $\frac{1}{2}$ ו- $z_1=\frac{1}{2}$

5. $S=\frac{z_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

לפי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת, סכום הסדרה z_n הוא 1.

שאלה 2

טריגונומטריה במרחב



בפירמידה ישרה ABCD הבסיס ABC הוא משולש שווה צלעות. כל הזוויות של קודקודי הפירמידה (הזוויות ADB, BDC, ADC) הן זוויות ישרות.

א. שטח המעטפת של הפירמידה הוא S.

הביעו באמצעות S :

(1) את צלע הבסיס של הפירמידה.

(2) את המקצוע הצדדי של הפירמידה.

ב. חשבו את גודל הזווית שבין המקצוע הצדדי ובין הבסיס.

תשובות

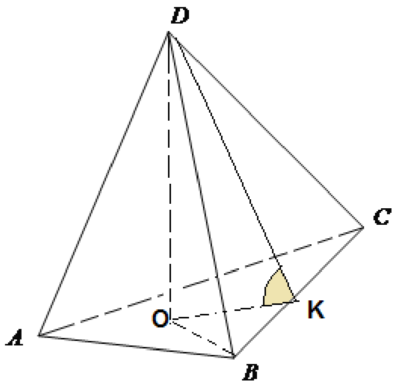
א. (1) אורך צלע הבסיס $BC = 2\sqrt{\frac{S}{3}}$.

(2) אורך המקצוע הצדדי הוא $\sqrt{\frac{2S}{3}}$.

ב. גודל הזווית שבין SB ובין פאת הבסיס הוא בערך $35°.26$.

פתרון

לא נוח לפתור משימה זו בעזרת הנתונים. נוכל לענות על כל השאלות על הפירמידה, אם נדע את אורך צלע הבסיס של הפירמידה. במקרים כאלה יש לסמן את אורך צלע הבסיס, להביע אותו באמצעות S, ולמצוא את אורך צלע הבסיס כפתרון המשוואה. לאחר מכן נוכל לענות על כל השאלות.



א. נסמן ב-a את אורך המקצוע הצדדי של הפירמידה.

במשולש שווה צלעות וישר זווית DCB:

$$BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

K - אמצע הקטע CB, DK הוא תיכון וגובה במשולש שווה צלעות DCB.

במשולש ישר זווית BKD: $BD = a,\ BK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

לפי משפט פיתגורס:

$$KD = \sqrt{BD^2 - BK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

שטח של כל פאה צדדית של הפירמידה הוא $\frac{1}{2}\cdot a^2$.

שטח המעטפת של הפירמידה הוא סכום השטחים של שלושה משולשים שווי צלעות חופפים:

$$\frac{3a^2}{2} = S \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2S}{3}}\ .$$

<u>אורך המקצוע הצדדי הוא $\sqrt{\frac{2S}{3}}$</u> . <u>אורך צלע הבסיס הוא $BC = a\sqrt{2} = 2\sqrt{\frac{S}{3}}$</u>

ב. הזווית שבין המקצוע הצדדי DB ובין הבסיס, היא הזווית DBO (הזווית שבין DB לבין היטלה BO על מישור ABC).

DO הוא גובה הפירמידה. בפירמידה ישרה עקב הגובה (נקודה O) הוא מרכז המעגל החוסם את הבסיס. במשולש שווה צלעות זאת נקודת החיתוך של תיכונים במשולש. קטע OB הוא $\frac{2}{3}$ של התיכון במשולש שווה צלעות ABC: $OB = \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

לפי משפט פיתגורס, במשולש ישר זווית DOB: $DO = \sqrt{DB^2 - OB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

במשולש ישר זווית BOD

$$\sin DBO = \frac{DO}{DB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle SBO \approx 35°.26$$

פרק ב: בעיות גדילה ודעיכה, חדו"א של פונקציות טריגונומטריות, פונקציות חזקה (עם מעריך רציונלי), פונקציות מעריכיות ופונקציות לוגריתמיות (סה"כ: 66.6 נקודות)

ענו על **שתיים** מבין השאלות 3-5 .

שאלה 3

גידול ודעיכה

משקל של חומר רדיואקטיבי מסוים יורד בכל שעה ב-5%.

א. איזה אחוז ממשקל החומר נותר כעבור יממה?

ב. מצאו את זמן מחצית החיים של החומר הרדיואקטיבי.

תשובות

א. כעבור יממה נותרו כ- 29.2% ממשקל החומר.

ב. זמן מחצית החיים של החומר הוא כ-13.5 שעות.

פתרון

הקושי של משימה זו נובע מכך שאין די נתונים למציאת משקלו של החומר הרדיואקטיבי. עם זאת, יש די נתונים כדי לענות על השאלות.

נוסחת גידול ודעיכה: $M_t = M_0 \cdot q^t$.

א. הנתון "משקל של חומר רדיואקטיבי מסוים יורד בכל שעה ב-5%", משמע שמשקל החומר כעבור שעה הוא 95% ממשקל החומר ההתחלתי: $M_t = 0.95 M_0$.

כעבור שעה: $0.95 M_0 = M_0 \cdot q$ ← $q=0.95$

כעבור יממה: $M_t = M_0 \cdot 0.95^{24} \approx 0.292 M_0 = 29.2\% M_0$

<u>כעבור יממה נותרו כ-29.2% ממשקל החומר</u>.

ב. לזמן מחצית החיים:

$$0.5 M_0 = 0.95^t M_0 \quad \leftarrow \quad t = \log_{0.95} 0.5 = \frac{\log 0.5}{\log 0.95} \approx 13.5$$

<u>זמן מחצית החיים של החומר הוא כ-13.5 שעות</u>.

שאלה 4

חדו"א של פונקציות מעריכיות

גרף הפונקציה $f(x)=\frac{ae^x}{1+e^{2x}}$ משיק לישר y=4

א. מצאו את הערך של פרמטר a.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f(x)? מצאו את התחומים של העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם הצירים.

ד. בנו סקיצה של גרף הפונקציה f(x) והישר y=4 המשיק לגרף.

ה. השתמשו בגרף הפונקציה f(x), והוכיחו כי לכל ערכי ה-x מתקיים האי-שוויון $2e^x \le 1+e^{2x}$.

תשובות

א. a=8.

ב. הפונקציה f(x) מוגדרת לכל ערכי ה-x. הפונקציה (x) עולה בתחום x<0 ויורדת בתחום x>0.

ג. נקודות החיתוך עם ציר Y : x=0, y=4. עם ציר X אין נקודות חיתוך.

פתרון

א. בנקודה שבה גרף הפונקציה f(x) משיק לישר y=4, השיפוע של הפונקציה וערך הנגזרת שלה הוא אפס.
נמצא את הנגזרת של הפונקציה f(x) לפי נוסחת הנגזרת של פונקציית מנה:

$$f'(x)=\frac{ae^x(1+e^{2x})-ae^x\cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{ae^x-ae^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{ae^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$$

$f'(x)=0$ כאשר $1-e^{2x}=0$ ← $e^{2x}=1$ ← x=0

לפי הנתון, הערך של y בנקודת ההשקה הוא 4: $f(0)=\frac{ae^0}{1+e^0}=\frac{a}{2}=4$ ← a=8

א. הפונקציה $f(x)=\frac{8e^x}{1+e^{2x}}$ מוגדרת לכל ערכי ה-x, כי לכל X הביטוי במכנה יהיה שונה מ-0.

למציאת התחומים של העלייה והירידה של הפונקציה נשתמש בנגזרת של הפונקציה שמצאנו בסעיף א: $f'(x)=\frac{8e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}=0$ > $1-e^{2x}=0$ ← $e^{2x}=1$ ← x=0

הנגזרת מוגדרת לכל ערכי ה-x, ומתאפסת בנקודה 0 בלבד:

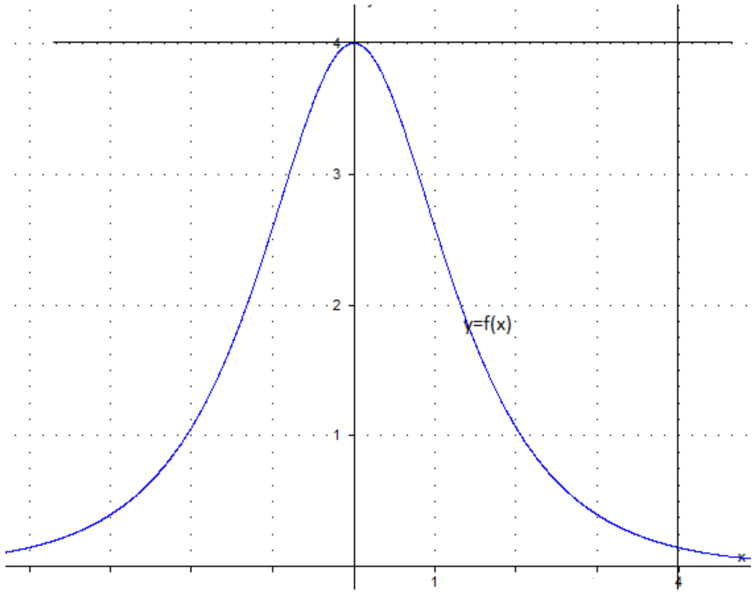
x	x>0	x=0	x<0
$f'(x)$	-	0	+
f(x)	↘	4	↗

<u>הפונקציה f(x) עולה בתחום x<0 ויורדת בתחום x>0.</u>

ב. נמצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר Y: נציב x=0 לפונקציה f(x):
y=4

אין נקודות חיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-X כי $f(x)=\frac{8e^x}{1+e^{2x}}>0$ לכל ערכי ה-x.

ד. לפי תוצאות הסעיפים הקודמים :



ה. לפי הגרף, נקודת (0, 4) היא מקסימום מוחלט של הפונקציה $f(x)=\frac{8e^x}{1+e^{2x}}$.

כלומר לכל ערך של x : $\frac{8e^x}{1+e^{2x}}\le 4 \quad /:4$

$$\frac{2e^x}{1+e^{2x}}\le 1 \quad /\cdot(1+e^{2x})$$

שימו לב : אפשר לכפול את האי-שוויון בביטוי כי לכל ערך של x : $1+e^{2x}>0$

שאלה 5

חדו"א של פונקציות טריגונומטריות

בציור מוצגים גרף של הפונקציה $f(x)=ax-\cos x$ וגרף של פונקציית הנגזרת שלה.

א. איזה גרף מהגרפים המוצגים הוא של הפונקציה f(x), ואיזה של הפונקציה $f'(x)$? נמקו.

ב. השתמשו במידע על הגרפים, ומצאו את ערך הפרמטר a. כתבו את הפונקציה הנגזרת של הפונקציה f(x).

ג. כתבו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה f(x) בנקודה שבה הגרף שלה חותך את ציר ה-Y.

ד. האם למשיק הזה יש נקודות משותפות עם גרף הפונקציה f(x), מלבד נקודת ההשקה? אם כן, כמה נקודות?

תשובות

א. גרף (2) הוא גרף של הפונקציה f(x), וגרף (1) הוא גרף של הפונקציה $f'(x)$.

ב. ערך הפרמטר a הוא 1. $f'(x)=a+\sin x$

ג. y=x-1

ד. למשיק יש אינסוף נקודות משותפות עם גרף הפונקציה f(x).

פתרון

א. אפשר לראות שגרף (2) הוא גרף של פונקציה עולה. כמו כן אפשר לראות שבגרף (1) כל ערכי הפונקציה אינם שליליים. לכן גרף (2) הוא גרף של הפונקציה f(x), וגרף (1) הוא גרף של הפונקציה $f'(x)$.

ב. בגרף רואים שגרף הפונקציה $f'(x)$ עובר דרך הנקודה (0, 1).

נציב את הנתונים האלה במשוואת הנגזרת: $f'(x)=a+\sin x$

1=a+sin 0

a=1

$f'(x) = 1 + \sin x$

ערך הפרמטר a הוא 1.

ג. הנקודה שבה גרף הפונקציה f(x) חותך את ציר ה-Y היא (0, -1).

כדי לכתוב את משוואת המשיק נחשב $f'(0)$: $f'(0) = 1 + \sin 0 = 1$

(אפשר גם למצוא $f'(0)$ לפי הגרף שלה)

לכן משוואת המשיק : y=x-1

ד. כדי למצוא נקודות משותפות של המשיק עם גרף הפונקציה f(x),

יש לפתור את המשוואה x-1=x-cos x

cos x=1

למשוואה cos x=1 יש אינסוף פתרונות : $x = 2\pi n$ כאשר n הוא מספר שלם.

כלומר, למשיק יש אינסוף נקודות משותפות עם גרף הפונקציה f(x).