<u>פתרון שאלה 1</u>

נסמן נקודה (x,y) המקיימת את התנאי.

אורך המשיק מהנקודה (x,y) למעגל (I): $d_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2-r^2}$

אורך המשיק מהנקודה (x,y) למעגל (II): $d_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2-r^2}$

על פי הנתון: $3d_1=d_2 \leftarrow 3\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2-r^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2-r^2}$

לאחר העלאה בריבוע, פתיחת סוגריים והעברת אגפים, נקבל: $8x^2+8y^2-20ax=8r^2-8a^2$

$$\downarrow$$

$$x^2-2\frac{1}{2}ax+y^2=r^2-a^2$$

$$\downarrow$$

$$\left(x-1\frac{1}{4}a\right)^2+y^2=r^2+\frac{9}{16}a^2$$

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא משוואת המעגל: $\left(x-1\frac{1}{4}a\right)^2+y^2=r^2+\frac{9}{16}a^2$.

פתרון שאלה 2

א. נחשב את $\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}$: $\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}=|\underset{\to}{u}||\underset{\to}{v}|\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=-\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{u} \rightarrow |\overrightarrow{CD}|=\sqrt{\left(-\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{u}\right)^2}=\sqrt{\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{u}^2-\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}}$$

ולאחר הצבה, נקבל: $|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{3}}{4}}\cong 0.62$

ב. $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+s\underset{\to}{v}$. צריך להתקיים: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, $\left(\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AB}\right)$, לכן:

$\left(-\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+s\underset{\to}{v}\right)\cdot\underset{\to}{u}=0 \rightarrow -\frac{1}{2}\underset{\to}{u}^2+s\underset{\to}{v}\cdot\underset{\to}{u}=0$, ולאחר הצבה נקבל: $-\frac{1}{2}+s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \rightarrow s=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

תשובה: $\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\to}{v}$

ג. $$|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\to}{v}\right)}=\sqrt{\frac{1}{4}\underset{\to}{u}^2+\frac{1}{3}\underset{\to}{v}^2-\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\to}{u}\cdot\underset{\to}{v}}$$

ולאחר הצבה נקבל: $|\overrightarrow{DE}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{12}}\cong 0.29$

ד. (I) $\overrightarrow{BG}=t\overrightarrow{BC}=t\left(\underset{\to}{v}-\underset{\to}{u}\right)$.

נסמן נקודה F על $\overrightarrow{DE}$ כך ש- $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{DE}=0$ $(*)$.

נרשום: $\overrightarrow{DF}=r\overrightarrow{DE}$ ונביע את $\overrightarrow{GF}$: $\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=t\left(\underset{\to}{u}-\underset{\to}{v}\right)-\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+r\left(-\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\frac{\sqrt{3}}{3}\underset{\to}{v}\right)$

לאחר סידור נקבל: $\overrightarrow{GF}=\left(t-\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)\underset{\to}{u}+\left(-t+\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)\underset{\to}{v}$ $(**)$.

הוקטור $\overrightarrow{GF}$ מקביל לוקטור $\overrightarrow{AB}$ כי שניהם ניצבים ל- $\overrightarrow{DE}$, לכן מ- $(**)$ נקבל:

$$r=\sqrt{3}\cdot t \leftarrow -t+\frac{\sqrt{3}}{3}r=0$$

נציב ב- $(**)$ ונקבל: $\overrightarrow{GF}=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)\underset{\rightarrow}{u}$.

נשווה עתה בין $\left|\overrightarrow{GF}\right|$ ל- $\left|\overrightarrow{DE}\right|$: $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$. לאחר פתיחת סוגריים וסידור, נקבל:

$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 t^2-\frac{2-\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{6}=0$. פתרון המשוואה הריבועית נותן:

$t_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-3}\cong 1.58$, $t_2=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-3}\cong 5.89$.

(II) הפתרון הראשון מייצג מצב בו הנקודה F נמצאת מעל הנקודה G, כלומר, לפני מפגש הישרים DE ו- BG ואילו הפתרון השני מייצג מצב בו הנקודה F נמצאת מתחת לנקודה G, כלומר, אחרי מפגש הישרים DE ו- BG.

פתרון שאלה 3

א. הערה: תיקון טעות בספר. כתוב $VB'D'$, צריך להיות $CB'D'$.

הפירמידה $ACD'B'$ היא פירמידה ישרה שבסיסה ACB' הוא משולש שווה צלעות ומקצועות הצד שלה שווים באורכם למקצועות הבסיס (כל המקצועות הם אלכסוני פאות בקובייה).

נסמן ב – E נקודה על המקצוע המשותף לשתי הפאות $CB'D'$ ו - ACD' (מקצוע CD') כך שמתקיים $B'E \perp CD'$, $AE \perp CD'$. כל פאות הפירמידה הם משולשים שווי צלעות לכן הגובה לצלע הוא $AE = B'E = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ (כאשר b אורך מקצועות הפירמידה). הזווית בין שתי הפאות היא זווית $\sphericalangle AEB'$.

לפי משפט הקוסינוסים מתקיים $\left(AB'\right)^2 = \left(AE\right)^2 + \left(B'E\right)^2 - 2\left(AE\right)\cdot\left(B'E\right)\cdot\cos\left(\sphericalangle AEB'\right)$

נציב $AE = B'E = \frac{\sqrt{3}}{2}b$, $AB' = b$ ונקבל $\cos\left(\sphericalangle AEB'\right) = \frac{1}{3}$.

תשובה: הזווית בין הפאות $CB'D'$ ו - ACD' היא 70.53^0.

ב. נסמן ב – F נקודה על הפאה ACB' כך ש $D'F \perp ACB'$. נקודה F היא מרכז המעגל החוסם את משולש ACB' (משולש שווה צלעות), לכן F היא נקודת מפגש התיכונים במשולש ACB'.

אורך תיכון במשולש ACB' הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}b$ לכן $B'F = \frac{\sqrt{3}}{3}b$.

הזווית בין $B'D'$ לפאה ACB' היא $\sphericalangle D'B'F$ ומתקיים: $\cos\left(\sphericalangle D'B'F\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}b}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ונקבל:

$\sphericalangle D'B'F = 54.74^0$.

ג. גובה הפירמידה הוא $D'F$ והוא שווה ל - $D'F=\sqrt{(D'B')^2-(B'F)^2}=\sqrt{b^2-\frac{1}{3}b^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}b$

שטח בסיס הפירמידה ACB' הוא $S_{ACB'}=\frac{1}{2}b^2\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$.

ונפח הפירמידה הוא: $V_{ACB'D'}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}b^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}b=\frac{\sqrt{2}}{12}b^3$.

נסמן את אורך צלע הקובייה ב - a ונראה כי $b=\sqrt{2}a$.

לאחר הצבה נקבל כי נפח הפירמידה הוא $V_{ACB'D'}=\frac{1}{3}a^3$

פתרון שאלה 4

א. המשיק BD:

שיעורי הנקודה D: $D(a,\ln a)$.

שיפוע המשיק: $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\leftarrow$ $f'(a)=\frac{1}{a}$

משוואת המשיק: $y-\ln a=\frac{1}{a}(x-a)$ $\leftarrow$ $y_{(BD)}=\frac{1}{a}x+\ln a-1$

המשיק CE:

שיעורי הנקודה E: $E(2a,\ln 2a)$.

שיפוע המשיק: $f'(x)=\frac{1}{x}$ $\leftarrow$ $f'(2a)=\frac{1}{2a}$

משוואת המשיק: $y-\ln 2a=\frac{1}{2a}(x-2a)$ $\leftarrow$ $y_{(CE)}=\frac{1}{2a}x+\ln 2a-1$

ב. שטח המשולש הוא: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot y_A$.

נמצא את אורך הצלע BC: שיעורי נקודה B הם $B(a-a\ln a,0)$,

שיעורי נקודה C הם $C(2a-2a\ln 2a,0)$.

לכן: $|BC|=a-a\ln a-(2a-2a\ln 2a)=a(\ln 4a-1)$

נמצא עתה את שיעורי נקודה A: $\frac{1}{a}x+\ln a-1=\frac{1}{2a}x+\ln 2a-1$

$$\downarrow$$

$$x_A=2a\ln 2$$

נציב במשוואת BD ונמצא את שיעור ה- y: $y_A=\frac{1}{a}\cdot 2a\ln 2+\ln a-1=\ln 4a-1$.

שטח המשולש הוא: $S(a)=\frac{1}{2}a(\ln 4a-1)^2$.

ג. נגזור את $S(a)$: $S'(a)=\frac{1}{2}(\ln 4a-1)^2+\frac{1}{2}a\cdot 2(\ln 4a-1)\cdot\frac{1}{a}$

נשווה את הנגזרת לאפס ונקבל: $0=\frac{1}{2}(\ln 4a-1)\cdot(\ln 4a+1)$

פתרונות המשוואה הם: $\ln 4a=1 \leftarrow a_1=\frac{1}{4}e$, $\ln 4a=-1 \leftarrow a_2=\frac{1}{4e}$.

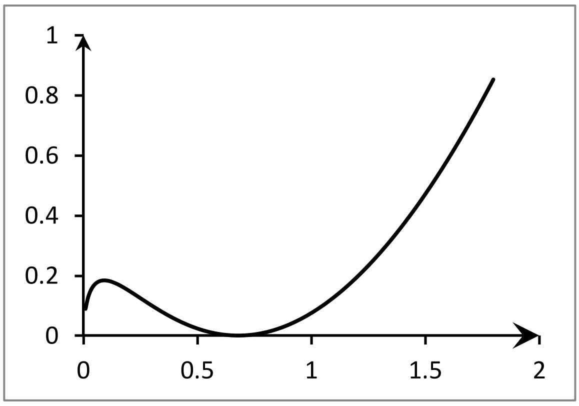
נמצא את סוג נקודות הקיצון: $S''(a)=\frac{\ln 4a}{a} \leftarrow S''\left(\frac{1}{4}e\right)>0$, $S''\left(\frac{1}{4e}\right)<0$.

נמצא עתה את שיעורי הפונקציה בנקודות: $S\left(\frac{1}{4}e\right)=0$, $S\left(\frac{1}{4e}\right)=\frac{1}{2e}$, ונקודות הקיצון הן:

$\max\left(\frac{1}{4e},\frac{1}{2e}\right)$, $\min\left(\frac{1}{4}e,0\right)$.

משמעותה של נקודת המינימום היא שכאשר $a=\frac{1}{4}e$, שני המשיקים נחתכים על ציר ה- x .

ד.



פתרון שאלה 5

א. על – פי הנתון $f''(x)=-2$ לכן $f'(x)=\int f''(x)dx=\int -2dx=-2x+c_1$ $(*)$.

נגזור את $g(x)$ פעמיים:
$$g'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}+f''(x)$$
$$g''(x)=f''(x)\cdot e^{f(x)}+f'^2(x)\cdot e^{f(x)}+f'''(x)=e^{f(x)}\cdot\left[f'^2(x)+f''(x)\right]$$

ולאחר הצבת הנתון $f''(x)=-2$ נקבל: $g''(x)=e^{f(x)}\cdot\left[f'^2(x)-2\right]$.

לפונקציה $g(x)$ יש שתי נקודות פיתול ומתקיים: $f'(x_2)=-\sqrt{2}$, $f'(x_1)=\sqrt{2}$.

מ - $(*)$ נקבל: $-2x_1+c_1=\sqrt{2}$, $-2x_2+c_1=-\sqrt{2}$. נחבר את שתי המשוואות ונקבל: $c_1=x_1+x_2$

ולפי הנתון בשאלה $(x_1+x_2=5)$ יתקבל: $c_1=5$.

תשובה: $f'(x)=-2x+5$.

ב. נתון כי גרף הפונקציה $f'(x)$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

הפונקציה $f(x)$ היא $f(x)=\int f'(x)dx=\int(-2x+5)dx=-x^2+5x+c_2$

נניח כי שיעור ה – X של נקודת ההשקה הוא x_3 , לכן מתקיים:

$$\begin{cases} f'(x_3)=f(x_3) \\ f''(x_3)=f'(x_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x_3+5=-x_3^2+5x_3+c_2 \\ -2=-2x_3+5 \ \rightarrow \ x_3=3\frac{1}{2} \end{cases}$$

לאחר הצבה של $x_3=3\frac{1}{2}$ נקבל $c_2=-7\frac{1}{4}$ ולכן: $f(x)=-x^2+5x-7\frac{1}{4}$.

תשובה: $g(x)=e^{-x^2+5x-7\frac{1}{4}}-2x+5$

ג. נמצא את x_1 ואת x_2 (מסעיף א'), נקבל: $x_1=\frac{5-\sqrt{2}}{2}$, $x_2=\frac{5+\sqrt{2}}{2}$.

נציב בגבולות האינטגרל ונקבל $\left|\int_{\frac{5-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{2}}{2}} g''(x)dx\right|=g'(x)\Big|_{\frac{5-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{5+\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{8}\cdot e^{-1.5}$