פתרון שאלה 1

א. מוקד הפרבולה בנקודה $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ ומשוואת הישר היא: $y=\sqrt{3}\cdot x-\frac{\sqrt{3}}{2}p$.

נמצא את נקודות החיתוך של הישר והפרבולה: $\left(\sqrt{3}\cdot x-\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)^2=2px$. מתקבלת המשוואה הריבועית $3x^2-5px+\frac{3}{4}p^2=0$. פתרונות המשוואה הם: $x_A=\frac{3}{2}p$, $x_B=\frac{1}{6}p$. לאחר הצבה נקבל את שיעורי ה- Y של הנקודות: $A\left(\frac{3}{2}p,\sqrt{3}p\right)$, $B\left(\frac{1}{6}p,-\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)$.

ב. מרכז המעגל הוא אמצע קטע AB , $O\left(\frac{5}{6}p,\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)$ ומחוג המעגל הוא המרחק AO : $R^2=\frac{16}{9}p^2$.

משוואת המעגל שהקטע AB הוא קוטר שלו, היא: $\left(x-\frac{5}{6}p\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}p\right)^2=\frac{16}{9}p^2$.

ג. מרכזי המעגלים נמצאים בנקודה ששיעור ה- X שלה הוא $x=\frac{5}{6}p$ ושיעור ה- Y שלה הוא $y=\frac{\sqrt{3}}{3}p$.

לאחר חלוקה נקבל: $\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}p}{\frac{5}{6}p}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

לכן, המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים המתקבלים הוא קו ישר שמשוואתו: $y=\frac{2\sqrt{3}}{5}\cdot x$

פתרון שאלה 2

א. נביע את $\overrightarrow{AE}$ ואת $\overrightarrow{AF}$:

$$\overrightarrow{AE}=\underset{\to}{u}+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\quad\rightarrow\quad\left|\overrightarrow{AE}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{w}^2}=\sqrt{a^2+a^2+\frac{1}{4}k^2a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{8+k^2}$$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\quad\rightarrow\quad\left|\overrightarrow{AF}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{w}^2}=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+4a^2+\frac{1}{4}k^2a^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{17+k^2}$$

המכפלה הסקלרית של שני הוקטורים היא:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=\left(\underset{\to}{u}+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=\frac{1}{2}\underset{\to}{u}^2+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}^2+\frac{1}{4}\underset{\to}{w}^2=$$

$$=\frac{1}{2}a^2+2a^2+\frac{1}{4}k^2a^2=\frac{1}{4}a^2\left(10+k^2\right)$$

הזווית בין שני הוקטורים (זווית $\sphericalangle EAF$) מקיימת: $\cos\left(\sphericalangle EAF\right)=\dfrac{\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|}$

לאחר הצבת התוצאות שהתקבלו:

$$\cos\left(\sphericalangle EAF\right)=\frac{\frac{1}{4}a^2\left(10+k^2\right)}{\frac{1}{2}a\sqrt{8+k^2}\cdot\frac{1}{2}a\sqrt{17+k^2}}=\frac{\left(10+k^2\right)}{\sqrt{8+k^2}\cdot\sqrt{17+k^2}}=\sqrt{\frac{k^4+20k^2+100}{k^4+25k^2+136}}$$

כדי לקבל את הערכים האפשריים של זווית $\sphericalangle EAF$ נציב שהי ערכי קיצון של k: $k=0$, $k=4$.

עבור $k=0$ נקבל $\sphericalangle EAF=30.96^0$.

עבור $k=4$ נקבל $\sphericalangle EAF=22.5^0$.

תשובה: $k=0$ נקבל $22.5^0\le\sphericalangle EAF\le30.96^0$.

ב. הנקודה G נמצאת על הפאה $ADD'A'$.

ג. (I) על פי הנתון ארבע הנקודות נמצאות במישור אחד לכן ווקטור הכיוון של מישור AEF שווה לווקטור הכיוון של מישור AGF .

נניח כי ווקטור הכיוון של מישור AEF הוא $\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w}$, מתקיים כי:

$$\begin{cases}(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w})\cdot\overrightarrow{AE}=0\\(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w})\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\to\begin{cases}(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w})\cdot\left(\underset{\to}{u}+\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=0\\(\alpha_1\underset{\to}{u}+\alpha_2\underset{\to}{v}+\alpha_3\underset{\to}{w})\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=0\end{cases}$$

לאחר פתיחת המכפלה הסקלרית והצבת המודולים המתאימים, נקבל $\alpha_1=4\ ,\alpha_2=1\ ,\ \alpha_3=-\frac{12}{k^2}$

ווקטור הכיוון של מישור AEF הוא $4\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}-\frac{12}{k^2}\underset{\to}{w}$.

באותו אופן נביע את ווקטור הכיוון של מישור AGF .

נניח כי ווקטור הכיוון של מישור AGF הוא $\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w}$, מתקיים כי:

$$\begin{cases}(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w})\cdot\overrightarrow{AG}=0\\(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w})\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\to\begin{cases}(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w})\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{v}+t\underset{\to}{w}\right)=0\\(\beta_1\underset{\to}{u}+\beta_2\underset{\to}{v}+\beta_3\underset{\to}{w})\cdot\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)=0\end{cases}$$

לאחר פתיחת המכפלה הסקלרית והצבת המודולים המתאימים, נקבל $\beta_1=-8+\frac{2}{t}\ ,\beta_2=1\ ,\ \beta_3=-\frac{2}{tk^2}$

מהנתון כי שני ווקטורי הכיוון זהים (ארבע הנקודות נמצאות באותו מישור) נקבל:

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=m(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$
$$\downarrow$$
$$\left(4,1,-\frac{12}{k^2}\right)=m\left(-8+\frac{2}{t},1,-\frac{2}{tk^2}\right)$$

ולכן נקבל $t=\frac{1}{6}$.

(II) כפי שמצאנו בסעיף הקודם (ראו ווקטור הכיוון של מישור AEF), ווקטור הכיוון של מישור $AEFG$

הוא $4\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}-\frac{12}{k^2}\underset{\to}{w}$.

ד. נביע את הזווית בין הישרים באמצעות המכפלה הסקלרית: $\cos\beta=\frac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{GE}}{\left|\overrightarrow{AF}\right|\left|\overrightarrow{GE}\right|}=\frac{\left(\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right)\cdot\left(\underset{\to}{u}+\frac{1}{3}\underset{\to}{w}\right)}{\left|\frac{1}{2}\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}+\frac{1}{2}\underset{\to}{w}\right|\left|\underset{\to}{u}+\frac{1}{3}\underset{\to}{w}\right|}$

לאחר הצבת המודולים המתאימים נקבל: $\cos\beta=\frac{3+k^2}{\sqrt{17+k^2}\cdot\sqrt{9+k^2}}$.

השוואה לנתון תיתן $\frac{1}{\cancel{9+k^2}}=\frac{\left(3+k^2\right)^2}{\left(17+k^2\right)\cdot\cancel{\left(9+k^2\right)}}\leftarrow k^4+5k^2-8=0$.

פתרון המשוואה הדו-ריבועית נותן $k=\sqrt{\frac{-5+\sqrt{57}}{2}}\approx 1.129$

פתרון שאלה 3

סכום פתרונות המשוואה הוא $m+1$ ומכפלת פתרונות המשוואה היא $40+30i$.

הביטוי $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$ ירשם כ- $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$, ולאחר הצבה נקבל כי $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{m+1}{40+30i}$.

מהנתון בשאלה נקבל $\frac{m+1}{40+30i}=0.12-0.04i$.

לאחר סידור המשוואה נקבל $m=5+2i$.

נציב את $m=5+2i$ במשוואה הריבועית ונקבל: $z^2-(6+2i)z+40+30i=0$.

פתרונות המשוואה הם:

$$z_{1,2}=\frac{6+2i\pm\sqrt{(6+2i)^2-4(40+30i)}}{2}=\frac{6+2i\pm\sqrt{-128-96i}}{2}=\frac{2(3+i)\pm 4i\cdot\sqrt{8+6i}}{2}=3+i\pm 2i\sqrt{8+6i}$$

נמצא את $\sqrt{8+6i}$: $\sqrt{8+6i}=a+bi \leftarrow \begin{cases} a^2-b^2=8 \\ ab=3 \end{cases}$.

פתרון מערכת המשוואות נותן: $a=3$, $b=1$.

לכן $z_{1,2}=3+i\pm 2i(3+i)$ ונקבל: $z_1=1+7i$, $z_2=5-5i$

פתרון שאלה 4

א. (I) $f'(x)=(\ln x)^k+k\cdot(\ln x)^{k-1}=(\ln x)^{k-1}\cdot(k+\ln x)$ $\leftarrow$ $f'(1)=(\ln 1)^{k-1}\cdot(k+\ln x)=0$

(II) נבחן את $f'(x)$ מימין ומשמאל ל- $x=1$ עבור ערכים אי-זוגיים ועבור ערכים זוגיים של k.

נבחר $x_1=0.9$, $x_2=1.1$

k **אי-זוגי:** $f'(0.9)=(-0.1)^{k-1}\cdot(k-0.1)>0$, $f'(1.1)=(0.095)^{k-1}\cdot(k+0.095)>0$

לכן עבור k אי-זוגי יש ל- $f(x)$ נקודת פיתול ב- $x=1$.

k **זוגי:** $f'(0.9)=(-0.1)^{k-1}\cdot(k-0.1)<0$, $f'(1.1)=(0.095)^{k-1}\cdot(k+0.095)>0$

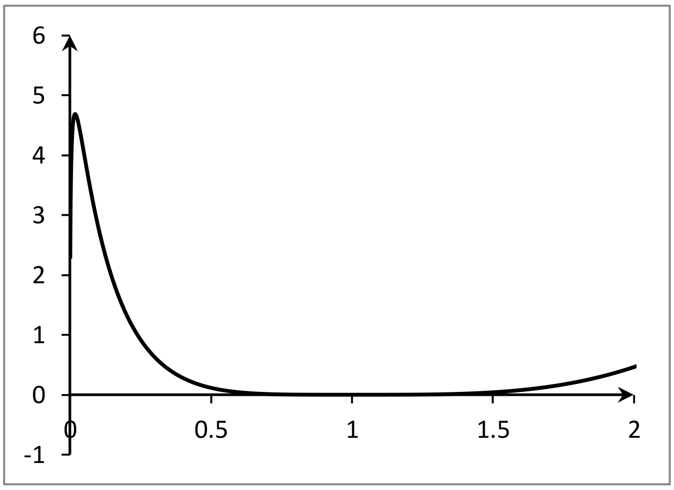
לכן עבור k זוגי יש ל- $f(x)$ נקודת מינימום ב- $x=1$.

ב. על-פי התוצאה בסעיף א' II ברור ש- k הוא מספר אי זוגי.

לפי הגרף יש ל- $f(x)$ נקודת מינימום ב- $x=0.05$ (בערך). נציב בנגזרת הפונקציה ונקבל:

$f'(0.05)=(\ln 0.05)^{k-1}\cdot(\ln 0.05+k)$. השוואת הנגזרת לאפס תיתן: $\ln 0.05+k=0$ ולכן $k=3$.

ג.



פתרון שאלה 5

א. על פי נתוני השאלה נקבל את המשוואה: $M\left(20\right)=20,000\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{10}\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)^{10}$

כאשר $M\left(20\right)$ הוא מספר הזאבים בשנת 2000 (10 שנים מ-1980 עד 1990 ו- 10 שנים מ-1990 עד 2000).

נציב ונקבל:

$$19,920=20,000\cdot\left(\frac{100+p}{100}\right)^{10}\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)^{10}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{19,920}{20,000}=\left[\left(\frac{100+p}{100}\right)\cdot\left(\frac{100-p}{100}\right)\right]^{10} \quad /\sqrt[10]{\ }$$
$$\downarrow$$
$$\sqrt[10]{\frac{19,920}{20,000}}=\frac{\left(100+p\right)\cdot\left(100-p\right)}{10,000}$$
$$\downarrow$$
$$9,996=10,000-p^2$$

לכן נקבל: $p=2\%$

ב. נציב $p=2\%$ ונקבל $q=0.98$.

והמשוואה היא: $M\left(t\right)=19,920\cdot 0.98^t$, נציב $M\left(t\right)=14,130$ ונקבל $14,130=19,920\cdot 0.98^t$.

לכן $t=\frac{\ln\left(\frac{14,130}{19,920}\right)}{\ln 0.98}=17$.

תשובה: מספר הזאבים יהיה 14,130 בשנת 2017.