פתרון שאלה 1

א. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\underset{\rightarrow}{u}+t\underset{\rightarrow}{v}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\underset{\rightarrow}{u}+t\underset{\rightarrow}{w}$

ב. נרשום $|\underset{\rightarrow}{u}|=a$, $|\underset{\rightarrow}{v}|=\sqrt{2}\,a$, $|\underset{\rightarrow}{w}|=\sqrt{3}\,a$

נביע את $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BC}=-\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{v} \leftarrow |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\underset{\rightarrow}{u}^2+\underset{\rightarrow}{v}^2-2\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}}$

נציב $|\overrightarrow{BC}|=a$ ונקבל: $a=\sqrt{a^2+2a^2-2\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}} \leftarrow \underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}=a^2$

נביע את $\overrightarrow{BC'}$: $\overrightarrow{BC'}=-\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{w} \leftarrow |\overrightarrow{BC'}|=\sqrt{\underset{\rightarrow}{u}^2+\underset{\rightarrow}{w}^2-2\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}}$

נציב $|\overrightarrow{BC'}|=\sqrt{2}\,a$ ונקבל: $\sqrt{2}\,a=\sqrt{a^2+3a^2-2\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}} \leftarrow \underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=a^2$

נביע את $\overrightarrow{CC'}$: $\overrightarrow{CC'}=-\underset{\rightarrow}{v}+\underset{\rightarrow}{w} \leftarrow |\overrightarrow{CC'}|=\sqrt{\underset{\rightarrow}{v}^2+\underset{\rightarrow}{w}^2-2\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}}$

נציב $|\overrightarrow{CC'}|=a$ ונקבל: $a=\sqrt{2a^2+3a^2-2\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}} \leftarrow \underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=2a^2$

תשובה: $\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}=a^2$, $\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=a^2$, $\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=2a^2$

ג. נרשום $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=|\overrightarrow{BE}||\overrightarrow{BF}|\cos(\sphericalangle FBE)$ $(*)$

$$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BF}=(-\underset{\rightarrow}{u}+t\underset{\rightarrow}{v})\cdot(-\underset{\rightarrow}{u}+t\underset{\rightarrow}{w})=\underset{\rightarrow}{u}^2-t\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}-t\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+t^2\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=$$
$$=a^2-ta^2-ta^2+2t^2a^2=a^2(2t^2-2t+1)$$

$$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{\underset{\rightarrow}{u}^2+t^2\underset{\rightarrow}{v}^2-2t\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{v}}=\sqrt{a^2+2t^2a^2-2ta^2}=a\sqrt{2t^2-2t+1}$$
$$|\overrightarrow{BF}|=\sqrt{\underset{\rightarrow}{u}^2+t^2\underset{\rightarrow}{w}^2-2t\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}}=\sqrt{a^2+3t^2a^2-2ta^2}=a\sqrt{3t^2-2t+1}$$

נציב ב - $(*)$:
$$a^2(2t^2-2t+1)=a\sqrt{2t^2-2t+1}\cdot a\sqrt{3t^2-2t+1}\cdot\cos(\sphericalangle FBE)$$
$$\downarrow$$
$$\cos(\sphericalangle FBE)=\sqrt{\frac{2t^2-2t+1}{3t^2-2t+1}}$$

ד. (I) הצבה של $t=\frac{1}{3}$ בתוצאת סעיף ג' תיתן: $\cos\left(\sphericalangle FBE\right)=\sqrt{\frac{\frac{2}{9}-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1}}=\sqrt{\frac{5}{6}}$

לכן $\sphericalangle FBE\approx 33.6^0$

(II) נחשב את נפח הפירמידה $BEFC$ לפי הבסיס BEC והגובה לבסיס EF.

נראה, ראשית כי $EF\perp BEC$.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}$$

נעזר במשפט: ישר ניצב למישור אם הוא ניצב לשני ישרים הפורשים את המישור. נראה כי $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BE}$

ו - $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}\right)\cdot\left(-\underset{\rightarrow}{u}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\right)=\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{u}-\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{9}a^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{9}a^2=0$$

$$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}\right)\cdot\left(-\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{v}\right)=\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{u}-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{u}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}=\frac{1}{3}a^2-\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}a^2=0$$

נחשב עתה את שטח הבסיס: $S_{BEC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EC}\right|\cdot\sin 45^0=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}a^2$

ואורך הגובה $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{v}+\frac{1}{3}\underset{\rightarrow}{w}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{v}^2-\frac{2}{9}\underset{\rightarrow}{v}\cdot\underset{\rightarrow}{w}+\frac{1}{9}\underset{\rightarrow}{w}^2}=\sqrt{\frac{2}{9}a^2-\frac{4}{9}a^2+\frac{3}{9}a^2}=\frac{1}{3}a$

נפח הפירמידה הוא: $V_{BEFC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{27}a^3$

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. משוואת המעגל היא $(x-1)^2+y^2=1$.

רכיב ה – X וה – Y של z_1 הם $z_{1(x)}=r_1\cos\theta_1$, $z_{1(y)}=r_1\sin\theta_1$.

נציב את הרכיבים של z_1 במשוואת המעגל ונקבל: $(r_1\cos\theta_1-1)^2+(r_1\sin\theta_1)^2=1$.

לאחר פתיחת סוגריים ושימוש בזהות $\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1=1$ נקבל $\cos\theta_1=\frac{1}{2}r_1$, $\sin\theta_1=\frac{1}{2}\sqrt{4-r_1^2}$.

ובהצבת הערכים של $\sin\theta_1$ ו - $\cos\theta_1$ בהצגה הטריגונומטרית של z_1 $(z_1=r_1cis\theta_1)$ נקבל:

$$z_1=r_1\cdot\frac{1}{2}r_1+r_1\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-r_1^2}\cdot i=\frac{1}{2}r_1\cdot\left(r_1+\sqrt{4-r_1^2}\cdot i\right)$$

באותו אופן נקבל $z_2=\frac{1}{2}r_2\cdot\left(r_2-\sqrt{4-r_2^2}\cdot i\right)$.

ב. (I) נרשום $z_3=z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot cis(\theta_1+\theta_2)$ $(*)$.

המספר z_3 נמצא על המעגל, לכן רכיבי ה – X וה – Y שלו מקיימים את משוואת המעגל. נקבל:

$$\left(r_1\cdot r_2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)-1\right)^2+\left(r_1\cdot r_2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\right)^2=1$$

לאחר פתיחת סוגריים וסידור המשוואה, נקבל $r_1\cdot r_2=2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)$ ובהצבה ב - $(*)$ נקבל

$$z_3=2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\cdot cis(\theta_1+\theta_2)$$

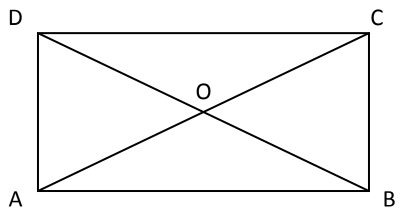
(II) מסעיף א' נקבל $\cos\theta_1=\frac{1}{2}r_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$ לכן $\theta_1=30^0$. $\cos\theta_2=\frac{1}{2}r_2=\frac{1}{2}$ לכן $\theta_2=-60^0=300^0$.

המספר z_3 נמצא על קשת המעגל בין z_1 ל - z_2 (כי הארגומנט שלו שווה לסכום הארגומנטים של z_1 ו - z_2)

המרובע $z_1z_3z_2o$ חסום במעגל לכן סכום זוויותיו הנגדיות הוא 180^0.

הזווית $\sphericalangle z_1oz_2$ היא ישרה $\left(\theta_1-\theta_2=30^0-(-60^0)=90^0\right)$ לכן $\sphericalangle z_1z_3z_2=90^0$.

פתרון שאלה 3



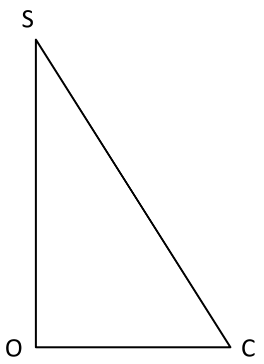
א. נתון $\tan\alpha = \frac{3}{4}$, $\left(\alpha = \sphericalangle BOC\right)$

לכן $\sphericalangle DBC = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ו - $\frac{DC}{BC} = \cot\frac{\alpha}{2}$.

נעזר בזהויות $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}}$, $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

ונקבל $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$ לכן $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}} = 3$.

תשובה: $\frac{DC}{BC} = 3$.



ב. (I) במשולש ΔCOS , $\sphericalangle OCS = 2\alpha$, $OC = \frac{1}{2}a$ (נתון)

נקבל: $SC = \frac{\frac{1}{2}a}{\cos 2\alpha}$.

נחשב את $\cos 2\alpha$: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$

לכן $SC = \frac{25}{14}\cdot a$.

(II) במשולש ΔCOS , ממשפט פיתגורס: $\left(SO\right)^2 = \left(SC\right)^2 - \left(CO\right)^2$

לאחר הצבת הערכים המתאימים נקבל $SO = \frac{12}{7}\cdot a$.

(III) שטח בסיס הפירמידה נתון בביטוי $S_{ABCD} = \frac{1}{2}a^2\sin\alpha$. כמו כן $\sin\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

נקבל: $V_{ABCDS} = \frac{1}{3}\cdot\left(SO\right)\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{7}a\cdot\frac{1}{2}a^2\sin\alpha = \frac{2}{7}a^3\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{35}a^3$

תשובה: נפח הפירמידה הוא $V_{ABCDS} = \frac{6}{35}a^3$.

ג.	נחשב את צלעות הבסיס.

$$AB=\frac{3a}{\sqrt{10}}\ ,\ BC=\frac{a}{\sqrt{10}}\ \leftarrow\ \left(3\cdot BC\right)^2+\left(BC\right)^2=a^2\ \leftarrow\ \left(AB\right)^2+\left(BC\right)^2=\left(AC\right)^2$$

במשולש ΔASB : $\cos\left(\sphericalangle BAS\right)=\frac{\frac{1}{2}AB}{AS}=\frac{\frac{3a}{2\sqrt{10}}}{\frac{25a}{14}}=\frac{21}{25\sqrt{10}}$

במשולש ΔASD : $\cos\left(\sphericalangle DAS\right)=\frac{\frac{1}{2}AD}{AS}=\frac{\frac{a}{2\sqrt{10}}}{\frac{25a}{14}}=\frac{7}{25\sqrt{10}}$

נקבל: $\sphericalangle BAS=74.6^0$, $\sphericalangle DAS=84.9^0$.

לכן $\sphericalangle SAS=110.5^0$

פתרון שאלה 4

א. תחום הערכים של הפרמטר a יקבע על ידי התנאי שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון.

נגזור את $f(x)$ ונשווה את נגזרתה לאפס. $f'(x)=\frac{(\ln x+1)\cdot(\ln x+a)-\ln x}{(\ln x+a)^2}=\frac{\ln^2 x+a\ln x+a}{(\ln x+a)^2}$

$f'(x)=0 \leftarrow \ln^2 x+a\ln x+a=0$ $(*)$. למשוואה הריבועית שהתקבלה יש שני פתרונות כאשר $\Delta>0$

כלומר $a^2-4a>0$.

תשובה: תחום הערכים של a הוא $a<0$ או $a>4$.

ב. מכפלת הפתרונות של $(*)$ היא a (לפי משוואות ויאטה $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$), לכן $a=-\sqrt{e}$.

ג. עבור $a=-\frac{1}{2}$: $f(x)=\frac{x\cdot\ln x}{\ln x-0.5}$

(I) תחום הגדרה: $\ln x\neq 0.5 \leftarrow x\neq\sqrt{e}$ וגם $x>0$.

(II) חיתוך ציר X: $x\cdot\ln x=0 \leftarrow \ln x=0 \leftarrow x=1$

חיתוך ציר Y: הפונקציה אינה מוגדרת עבור $x=0$.

תשובה: $(1,0)$

(III) נקודות קיצון:

מ - $(*)$ נקבל $\ln^2 x-0.5\ln x-0.5a=0$. פתרון המשוואה נותן $x_1=e$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{e}}$

נגזור מונה בלבד של $f'(x)$ (המכנה חיובי): $f''^*(x)=\frac{4\ln x-1}{2x}$ ובהצבת ערכי x_1 ו - x_2 נקבל

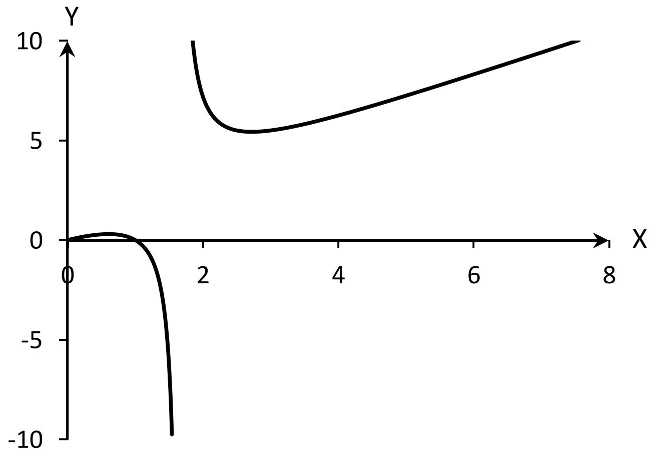
$f''(e)>0$, $f''\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)<0$. נציב את שיעורי ה – X של נקודות הקיצון ב - $f(x)$ ונקבל

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)_{\max} \ , \ (e,2e)_{\min}$$

(IV)   תחומי עלייה: $0<x<\frac{1}{\sqrt{e}}$ או $x>e$

תחומי ירידה: $\frac{1}{\sqrt{e}}<x<\sqrt{e}$ או $\sqrt{e}<x<e$

ד.



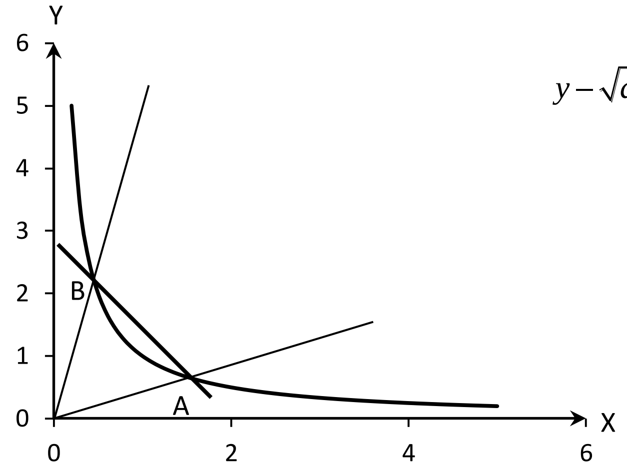
פתרון שאלה 5

א. חיתוך $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ ו - $y=ax$: $ax=\frac{1}{x} \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{a}} \leftarrow y=\sqrt{a}$

חיתוך $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ ו - $y=bx$: $bx=\frac{1}{x} \leftarrow x=\frac{1}{\sqrt{b}} \leftarrow y=\sqrt{b}$

תשובה: $A\left(\frac{1}{\sqrt{a}},\sqrt{a}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{b}},\sqrt{b}\right)$

ב. נמצא את משוואת הישר AB.



$m_{AB}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}=-\sqrt{ab}$, $y-\sqrt{a}=-\sqrt{ab}\cdot\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$

משוואת הישר AB היא: $y=-\sqrt{ab}\cdot x+\sqrt{b}+\sqrt{a}$.

השטח המוגבל בין הישר AB וגרף הפונקציה $f\left(x\right)$

נתון בביטוי:

$$S=\int_{\frac{1}{\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}}\left(-\sqrt{ab}\cdot x+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\frac{1}{x}\right)dx$$

חישוב האינטגרל ייתן (לאחר סידור): $S=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\ln\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}+\ln\sqrt{\frac{a}{b}}$

ג. נציב $\sqrt{\frac{a}{b}}=t$, $\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{t}$ ונקבל: $g\left(t\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{t}-t\right)+\ln t=\frac{1-t^2}{2t}+\ln t$

ד. על פי הנתון $\frac{a}{b}=\frac{1}{4} \leftarrow t=\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{1}{2}$.

לכן: $g\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{4}}{2\cdot\frac{1}{2}}+\ln\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\ln\frac{1}{2}\approx 0.057$