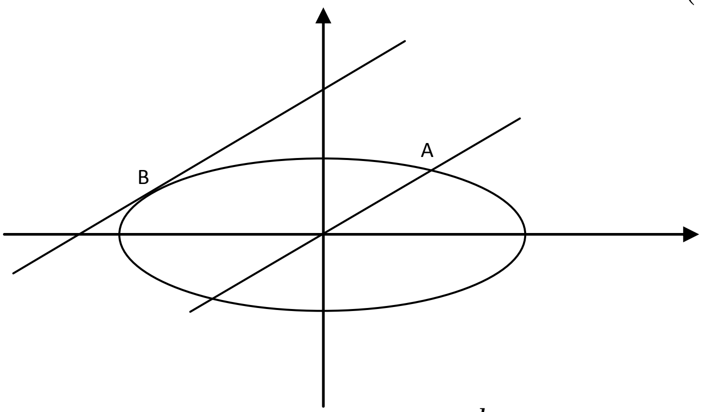
פתרון שאלה 1

נרשום את שיעורי הנקודות A ו – B: $B(x_2,y_2)$, $A(x_1,y_1)$



נבודד את y במשוואת האליפסה: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

נניח כי A נמצאת ברביע הראשון ו – B ברביע השני.

שיעורי הנקודה A הם: $A\left(x_1,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}\right)$.

שיפוע המשיק לאליפסה בנקודה B (יתקבל על ידי גזירה) הוא: $m_B=-\frac{b}{a}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{a^2-x_2^2}}$

שיפוע הישר OA הוא $m_{OA}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}}{x_1}$.

על פי הנתון $m_B=m_{OA}$, לכן: $-\frac{b}{a}\cdot\frac{x_2}{\sqrt{a^2-x_2^2}}=\frac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}}{x_1}$ $(*)$.

נבודד את x_2 מ - $(*)$ ונקבל $x_2=-\sqrt{a^2-x_1^2}$ וכן $y_2=\frac{b}{a}\cdot x_1$ $\leftarrow$ $B\left(-\sqrt{a^2-x_1^2},\frac{b}{a}\cdot x_1\right)$.

נחשב את $(OA)^2+(OB)^2$: $(OA)^2+(OB)^2=x_1^2+\frac{b^2}{a^2}\cdot\left(a^2-x_1^2\right)+a^2-x_1^2+\frac{b^2}{a^2}\cdot x_1^2$

לאחר כינוס איברים נקבל: $(OA)^2+(OB)^2=a^2+b^2$.

פתרון שאלה 2

א. נרשום את משוואת המרחק בין נקודה על הישר $(3,3,-4)$ למישור:

$$\sqrt{30}=\frac{\left|3(k-1)-3-4(k+2)-13\right|}{\sqrt{(k-1)^2+1+(k+2)^2}}=\frac{|-k-27|}{\sqrt{2k^2+2k+6}}$$

לאחר העלאת שני אגפי המשוואה בחזקה שנייה נקבל: $59k^2+6k-549=0$

פתרונות המשוואה הריבועית הם $k_1=3$, $k_2=-3\frac{6}{59}$.

הישר מקביל למישור אם ורק אם וקטור הכיוון של הישר ניצב לווקטור הכיוון של האנך למישור, כלומר,

$(k+1,k,-1)\cdot(k-1,-1,k+2)=0$. נקבל את המשוואה הריבועית $k^2-2k-3=0$ שפתרונותיה הם

$k_3=3$, $k_4=-1$.

הפתרון המשותף לשני התנאים (שתי המשוואות הריבועיות שקבלנו) הוא $k=3$.

משוואת המישור היא: $\pi: 2x-y+5z-13=0$

ההצגה הפרמטרית של הישר היא: $l_1: \underset{\sim}{x}=(3,3,-4)+t\cdot(4,3,-1)$

ב. נמצא את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה $(3,3,-4)$.

ראשית נרשום את ההצגה הפרמטרית של הישר, l_3, הניצב למישור ועובר בנקודה $(3,3,-4)$.

$l_3: \underset{\sim}{x}=(3,3,-4)+s\cdot(2,-1,5)$ (הוקטור $(2,-1,5)$ הוא וקטור הכיוון הניצב למישור).

נקודת החיתוך בין הישר l_3 והמישור תתקבל על ידי הצבת ההצגה הפרמטרית של נקודה על הישר

במשוואת המישור. נקבל: $2(3+2s)-(3-s)+5(-4+5s)-13=0$

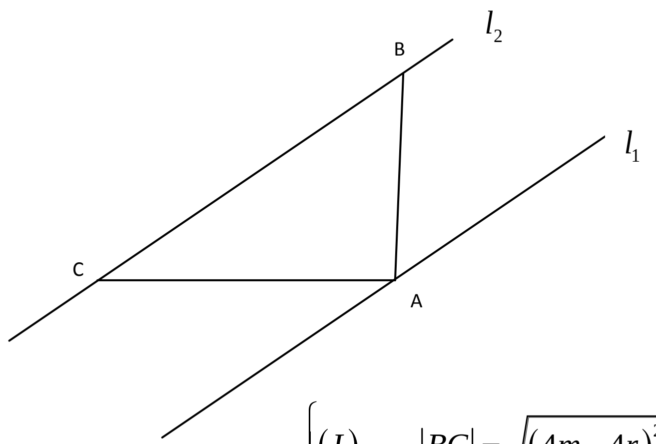
פתרון המשוואה נותן: $s=1$, ונקודת החיתוך היא $(5,2,1)$.

ההצגה הפרמטרית של l_2 היא: $l_2:(5,2,1)+r\cdot(4,3,-1)$.

ג. נניח כי שיעורי נקודות B ו – C הם:

$$B(5+4r,2+3r,1-r)$$

$$C(5+4m,2+3m,1-m)$$



צריכים להתקיים שני תנאים:

$$\begin{cases} (I) & |BC| = \sqrt{(4m-4r)^2+(3m-3r)^2+(m-r)^2} = \sqrt{\frac{1568}{13}} \\ (II) & \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \ \rightarrow (4r+2,3r-1,5-r)\cdot(4m+2,3m-1,5-m)=0 \end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{cases} (I) & \sqrt{16(m-r)^2+9(m-r)^2+(m-r)^2} = \sqrt{\frac{1568}{13}} \\ (II) & 16rm+8m+8r+4+9rm-3m-3r+1+rm-5m-5r+25=0 \end{cases}$$

לאחר סידור המשוואות נקבל:

$$(I)\ \ m-r=\frac{28}{13} \ \ , \ \ (II)\ \ 13rm=-15$$

פתרון שתי המשוואות נותן:

אפשרות א': $r=\frac{15}{13}$, $m=-1$ והנקודות הן: $B\left(9\frac{8}{13},5\frac{6}{13},-\frac{2}{13}\right)$, $C(1,-1,2)$

אפשרות ב': $r=1$, $m=-\frac{15}{13}$ והנקודות הן: $B(9,5,0)$, $C\left(\frac{5}{13},-1\frac{6}{13},2\frac{2}{13}\right)$

פתרון שאלה 3

א. נרשום $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

נקבל: $\dfrac{z - iz}{z + i\bar{z}} = \dfrac{x + iy - ix + y}{x + iy + ix + y} = \dfrac{(x+y) - i(x-y)}{(x+y) + i(x+y)}$

נכפול מונה ומכנה בצמוד של המכנה $\dfrac{z - iz}{z + i\bar{z}} = \dfrac{(x+y) - i(x-y)}{(x+y) + i(x+y)} \cdot \dfrac{(x+y) - i(x+y)}{(x+y) - i(x+y)} = \dfrac{y}{x+y} - i \cdot \dfrac{x}{x+y}$

על פי הנתון $\left| \dfrac{y}{x+y} - i \cdot \dfrac{x}{x+y} \right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ לכן $\left(\dfrac{y}{x+y} \right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+y} \right)^2 = \dfrac{1}{2}$.

לאחר סידור המשוואה נקבל: $x - y = 0$.

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $y = x$.

ב. נמצא את מרחק הנקודה $(2,1)$ מהישר $x - y = 0$.

$$d = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

תשובה: המרחק המינימאלי של המספר $z = 2 + i$ מהמקום הגיאומטרי הוא $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון שאלה 4

א. נגזור את $g(x)$: $g'(x)=(-\sin x - x\cos x)\cdot e^{-x\cdot\sin x}$.

לפי הנתון $g'(x_1)=0$ לכן $\sin x_1 + x_1\cdot\cos x_1 = 0$ (הביטוי $e^{-x_1\cdot\sin x_1}$ חיובי לכל X).

חלוקה ב - $\cos x_1$ תיתן: $tgx_1 + x_1 = 0$

ב. בסעיף א' התקבל $x_1=-tgx_1$, נמצא את $g(x_1)$: $g(x_1)=e^{-x_1\cdot\sin x_1}=e^{tgx_1\cdot\sin x_1}$

על פי הנתון $g(x_1)=0.162$ לכן $/\ln$ $e^{tgx_1\cdot\sin x_1}=0.162$ $\leftarrow$ $tgx_1\cdot\sin x_1=-1.82$

נרשום $tgx_1=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}$ ונקבל $\frac{\sin^2 x_1}{\cos x_1}=-1.82$ $\leftarrow$ $\frac{1-\cos^2 x_1}{\cos x_1}=-1.82$.

נציב $\cos x_1 = t$ ונקבל $t^2-1.82t-1=0$. פתרונות המשוואה הם $t_1=-0.442$, $t_2=2.262$ $(-1\le t\le 1)$.

לכן $\cos x_1=-0.442$ $\leftarrow$ $x_1=2.03$

(הערה: נבדוק כי אכן הנקודה היא נקודת מינימום מקומי).

תשובה: נקודת המינימום היא $(2.03, 0.162)$.

ג. (I) $f'(x)=(\sin x + x\cdot\cos x)\cdot e^{x\cdot\sin x}$.

בסעיף א' קבלנו כי $\sin x_1 + x_1\cdot\cos x_1 = 0$ לכן $f'(x_1)=0$.

(II) $f'(x)=0$ $\leftarrow$ $(\sin x + x\cdot\cos x)\cdot e^{x\cdot\sin x}=0$ $\leftarrow$ $\sin x + x\cdot\cos x = 0$

מהביטוי האחרון נקבל $tgx + x = 0$.

בתחום $0<x<\frac{\pi}{2}$ פונקצית הטנגנס חיובית לכן אין נקודת קיצון מקומית בתחום זה.

בתחום $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ פונקצית הטנגנס שלילית ועולה לכן יש רק נקודה אחת בה מתקיים $tgx+x=0$,

נקודה זו היא $x_1=2.03$ (אותה מצאנו בסעיף ב').

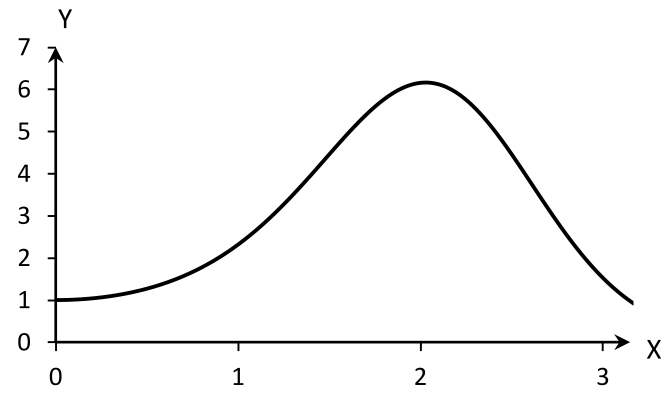
בדיקת סוג נקודת הקיצון (לפי נגזרת שנייה או באמצעות טבלה) תיתן: $(2.03, 6.17)_{\max}$.

בדיקה בנקודות קצה התחום:

$f(0)=1$, $f(\pi)=1$.

תשובה: מינימום מוחלט: $(0,1),(\pi,1)$. מקסימום מקומי ומוחלט: $(2.03,6.17)_{\max}$.

(III)



פתרון שאלה 5

א. נסמן:

דבורים מזן A: $N_{0(A)} = 30,000$, $a_A = 0.95$.

דבורים מזן B: $N_{0(B)} = 12,000$, $a_B = 1.08$.

נמצא כעבור כמה שבועות יהיה מספר הדבורים משני הזנים, שווה.

$N_{0(A)} \cdot a_A^t = N_{0(B)} \cdot a_B^t$, נציב נתונים ונקבל: $30,000 \cdot 0.95^t = 12,000 \cdot 1.08^t$.

פתרון המשוואה נותן: $\left(\frac{1.08}{0.95}\right)^t = \frac{30,000}{12,000} \leftarrow t = \frac{\ln 2.5}{\ln\left(\frac{1.08}{0.95}\right)} = 7.14$ (t בשבועות).

תשובה: כמות הדבורים משני הזנים תהייה שווה אחרי 50 ימים.

ב. נרשום את הפונקציה של הכמות הכוללת של הדבורים (משני הזנים): $f(t) = N_{0(A)} \cdot a_A^t + N_{0(B)} \cdot a_B^t$

ולאחר הצבה נקבל $f(t) = 30,000 \cdot 0.95^t + 12,000 \cdot 1.08^t$. נמצא את נקודת המינימום של $f(t)$,

$f'(t) = 30,000 \cdot \ln 0.95 \cdot 0.95^t + 12,000 \cdot \ln 1.08 \cdot 1.08^t$. השוואת הנגזרת לאפס תיתן

$$30,000 \cdot \ln 0.95 \cdot 0.95^t + 12,000 \cdot \ln 1.08 \cdot 1.08^t = 0 \leftarrow \left(\frac{1.08}{0.95}\right)^t = -\frac{2.5 \cdot \ln 0.95}{\ln 1.08} \leftarrow t = \frac{\ln\left(-\frac{2.5 \cdot \ln 0.95}{\ln 1.08}\right)}{\ln\left(\frac{1.08}{0.95}\right)}$$

ונקבל $t = 4$

נמצא את הכמות המינימלית: $f(4) = 40,760$.

תשובה: הכמות המינימלית של דבורים תתקבל כעבור 4 שבועות והיא תהייה 40,760 דבורים.