פתרון שאלה 1

א. שיפוע הישר AB המשיק לאליפסה בנקודה E הוא $m_{AB}=-1$. נמצא את הנקודה על האליפסה בה

השיפוע הוא 1-.

נחלץ את Y: $y=\pm\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+a^2}$, נגזור ונשווה ל – 1-. $y'=\frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+a^2}}$ $\leftarrow$ $\frac{-x}{4\sqrt{-\frac{1}{4}x^2+a^2}}=-1$

פתרון המשוואה הוא $x=\pm\frac{4a}{\sqrt{5}}$ וזהו שיעור ה – X של נקודה E ושיעור ה – X של נקודה G בהתאמה.

ב. נציב x_1 במשוואת האליפסה ונקבל את שיעורי נקודה E: $E\left(x_1,\frac{1}{4}x_1\right)$

משוואת הישר AB: $y-\frac{1}{4}x_1=-1\cdot(x-x_1)$ $\leftarrow$ $y=-x+\frac{5}{4}x_1$. נקודה B היא: $B\left(0,\frac{5}{4}x_1\right)$.

ג. שטח הריבוע: $S_{ABCD}=2\cdot\left(\frac{5}{4}x_1\right)^2=\frac{25}{8}x_1^2$

שטח המלבן: $S_{EFGH}=4\cdot x_1\cdot\frac{1}{4}x_1=x_1^2$

ונקבל: $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}}=\frac{25}{8}$.

ד. מסעיף ג' נקבל: $S_{ABCD}=\frac{25}{8}x_1^2=64$ $\leftarrow$ $x_1^2=\frac{512}{25}$

נציב בפתרון שהתקבל בסעיף א' $\left(x_1^2=\frac{16a^2}{5}\right)$ ונקבל: $a^2=\frac{32}{5}$.

פתרון שאלה 2

א. נרשום $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$. נביע באמצעות a ו - b את $|z|$, $|z-\bar{z}|$, $|z+\bar{z}|$.

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$z+\bar{z}=2a \rightarrow |z+\bar{z}|=2a$$
$$z-\bar{z}=2bi \rightarrow |z-\bar{z}|=2b$$

(I) $w=\frac{2z}{z+\bar{z}}=\frac{2(a+bi)}{2a}=1+\frac{b}{a}i$ לכן: $\frac{1}{2}\cdot|w|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}=\frac{|z|}{|z+\bar{z}|}$

(II) $q=\frac{2\cdot z}{z-\bar{z}}=\frac{2\cdot(a+bi)}{2bi}=1+\frac{a}{bi}=1-\frac{a}{b}i$ לכן: $\frac{1}{2}\cdot|q|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2b}=\frac{|z|}{|z-\bar{z}|}$

ב. נציב במשוואה $m^2+|w|\cdot|q|\cdot m+1=0$ את: $|w|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, $|q|=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ ונקבל

$m^2+\frac{a^2+b^2}{ab}\cdot m+1=0$. נפתור בעזרת נוסחת השורשים.

$$m_{1,2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{a^2b^2}-4}}{2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}{a^2b^2}}}{2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\sqrt{\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2b^2}}}{2}=\frac{-\frac{a^2+b^2}{ab}\pm\frac{a^2-b^2}{ab}}{2}$$

והפתרונות הם: $m_1=-\frac{b}{a}$, $m_2=-\frac{a}{b}$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

א. התנאי $BC \parallel EF$ אינו הכרחי כי לא ניתן לחסום משולש שווה צלעות במשולש שווה שוקיים (כך שאחד מקודקודי המשולש שווה הצלעות מונח על אמצע הבסיס של המשולש שווה השוקיים), אלא אם מתקיים התנאי לעיל.

ב. היחס בין נפח הפירמידות שווה ליחס בין שטחי המשולשים, כלומר: $\frac{V_{ABCS}}{V_{DEFS}}=\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$ (לשתי הפירמידות גובה זהה.

נסמן $DC=x$ ונקבל: $S_{ABC}=\frac{x^2}{\tan\alpha}$.

נביע את אורך הצלע של המשולש החסום באמצעות x: $DF=\frac{x\cdot\cos\alpha}{\sin\left(30^0+\alpha\right)}$.

לכן: $S_{DEF}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x\cdot\cos\alpha}{\sin\left(30^0+\alpha\right)}\right)^2\cdot\sin 60^0$.

ונקבל: $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=\frac{8\cdot\sin^2\left(30^0+\alpha\right)}{\sqrt{3}\cdot\sin 2\alpha}$

פתרון שאלה 4

א. אם לפונקציה $h(x)$ יש נקודת קיצון, הרי שצריך להתקיים $h'(x)=0$, אבל אז $g(x)$ אינה מוגדרת

דבר זה סותר את הנתון כי $g(x)$ מוגדרת לכל x.

ב. גזירת $f(x)$ תיתן: $f'(x)=\frac{h'(x)}{h(x)}$ $\leftarrow$ $h'(x)=h(x)\cdot f'(x)$.

נציב ב - $g(x)$ ונקבל:

$$g(x)=\ln[h'(x)]=\ln[h(x)\cdot f'(x)]=\ln[h(x)]+\ln[f'(x)]=f(x)+\ln[f'(x)]$$

ג. מסעיף ב' ומהעובדה כי $h'(x)>h(x)>0$ ניתן לראות כי $\ln[f'(x)]=\ln\left[\frac{h'(x)}{h(x)}\right]>0$

לכן $g(x)=f(x)+p(x)$, $\left(p(x)>0\right)$, כלומר $g(x)>f(x)$ לכל X.

תשובה: גרף א' מתאר את $f(x)$ וגרף ב' מתאר את $g(x)$.

ד. $g(x)=\ln[h'(x)]=\ln\left(e^x+ae^{ax}\right)$

עבור $x=0$ נקבל $g(0)=\ln(1+a)$.

לפי גרף ב': $g(0)\approx 1.6$ לכן $\ln(1+a)\approx 1.6$ $\leftarrow$ $a\approx e^{1.6}-1$

תשובה: $a=4$

פתרון שאלה 5

א. חיתוך ציר Y: $f(0)=0$.

חיתוך ציר X: $\cos x\cdot\left(e^{\sin x}-1\right)=0$

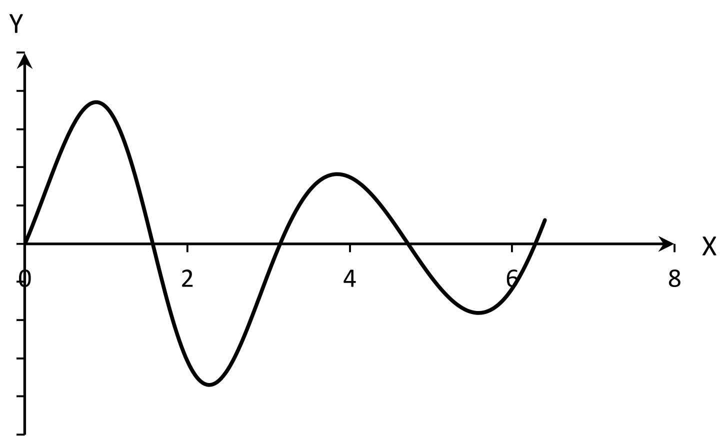
$x_2=\frac{3\pi}{2}$, $x_1=\frac{\pi}{2}$ $\leftarrow$ $\cos x=0$

$x_5=2\pi$, $x_4=\pi$, $x_3=0$ $\leftarrow$ $\sin x=0$ $\leftarrow$ $e^{\sin x}=1$

תשובה: $(2\pi,0)$, $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$, $(\pi,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$.

ב. נבדוק את ערך הפונקציה ב - $x=\frac{\pi}{4}$: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cdot\left(e^{\sin\frac{\pi}{4}}-1\right)\approx 0.727$. על פי הנתון יש ל - $f(x)$

נקודות קיצון בין כל שתי נקודות חיתוך עם ציר ה – X.



ג. נגזור את $g(x)$: $g'(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}-\cos x=\cos x\cdot\left(e^{\sin x}-1\right)$

לכן $g'(x)-f(x)=0$.

ד. מסעיף ג' ניתן לראות כי $\int f\left(x\right)dx = g\left(x\right)+c$.

נחשב את השטח המוגבל בין הגרף של $f\left(x\right)$ וציר ה – x תוך התייחסות לשטחים מעל ומתחת לציר, נקבל:

$$S=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f\left(x\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f\left(x\right)dx-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f\left(x\right)dx=g\left(x\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-g\left(x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+g\left(x\right)\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}-g\left(x\right)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=$$

$$=g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)-g\left(0\right)-g\left(\pi\right)+g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-g\left(\pi\right)-g\left(2\pi\right)+g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=2g\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+2g\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)-2g\left(\pi\right)-g\left(0\right)-g\left(2\pi\right)$$

לאחר הצבה נקבל: $S=2e+\dfrac{2}{e}-4\approx 2.17$