## פתרון שאלה 1

א. נמצא את משוואת המישור: $\begin{cases} I) & (a,b,c)\cdot(-1,0,2)=0 \\ II) & (a,b,c)\cdot(0,3,-1)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I) & -a+2c=0 \\ II) & 3b-c=0 \end{cases}$

נקבל: $a=6$ , $b=1$ , $c=3$. $6x+y+3z+d=0$

נציב את הנקודה $(5,-2,1)$ במשוואת המישור ונקבל $d=-31$.

משוואת המישור היא: $6x+y+3z-31=0$

מציאת קודקוד A:

נציב את שיעורי קודקוד A במשוואת המישור: $6a+2a+3(2a+1)-31=0 \leftarrow a=2$

קודקוד A הוא $A(2,4,5)$

מציאת קודקוד C:

שיעור ה – X של נקודה על המישור הוא $x=5-t$. על פי הנתון $x_c=-2$ לכן $5-t=-2 \leftarrow t=7$.

נרשום הצגה פרמטרית של נקודות המישור, כאשר $t=7$ : $(x,y,z)=(-2,-2+3s,15-s)$.

נמצא את אורך האלכסון AC: $(AC)^2=(2+2)^2+(6-3s)^2+(-10+s)^2=10s^2-56s+152$

האלכסון AC הוא אלכסון בריבוע ששטחו 88 לכן $(AC)^2=176$ ונקבל את המשוואה הריבועית

$10s^2-56s-24=0$. פתרונות המשוואה הם $s_1=6$ , $s_2=-\frac{2}{5}$.

שיעורי קודקוד C הם מספרים שלמים, לכן: $C(-2,16,9)$.

ב. ( I ) אמצע האלכסון AC: $F\left(\frac{2-2}{2},\frac{4+16}{2},\frac{5+9}{2}\right)=(0,10,7)$

וקטור הכיוון $\overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{AC}=(-4,12,4)=(-1,3,1)$

וקטור הכיוון של האלכסון $BD$ $(e,f,g)$ ניצב לווקטור הכיוון של המישור ולווקטור הכיוון של האלכסון AC, לכן:

$$\begin{cases} I) & (e,f,g)\cdot(6,1,3)=0 \\ II) & (e,f,g)\cdot(-1,3,1)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I) & 6e+f+3g=0 \\ II) & -e+3f+g=0 \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $e=8$ , $f=9$ , $g=-19$ .

ההצגה הפרמטרית של האלכסון BD היא: $\overrightarrow{BD}: \underset{\to}{x}=(0,10,7)+r\cdot(8,9,-19)$ .

( II )    הישר המבוקש הוא הישר EF והצגתו הפרמטרית היא: $\overrightarrow{EF}: \underset{\to}{x}=(0,10,7)+k\cdot(6,1,3)$

ג.    ( I )    נרשום את שיעורי קודקוד הפירמידה: $E(6k,10+k,7+3k)$ . גובה הפירמידה הוא $EF$

ואורכו נתון בביטוי: $|EF|=\sqrt{(6k)^2+k^2+(3k)^2}=\pm\sqrt{46}\cdot k$ .

נפח הפירמידה הוא $V_{ABCDE}=\frac{1}{3}\cdot|EF|\cdot S_{ABCD}$, נציב את הנתונים ונקבל: $\pm\frac{1}{3}\cdot\sqrt{46}k\cdot 44=\frac{176}{3}\cdot\sqrt{46}$

חילוץ $k$ נותן $k=\pm2$ .

תשובה: $E(12,12,13)$ או: $E(-12,8,1)$

( II )    משולש $\Delta BED$ הוא שווה שוקיים. בסיס המשולש הוא אלכסון בסיס הפירמידה $(BD)$

והגובה לבסיס במשולש הוא גובה הפירמידה $(EF)$ .

נקבל: $\sqrt{\frac{11}{46}}=\frac{\sqrt{44}}{2\sqrt{46}}=\frac{\frac{1}{2}|BD|}{|EF|}=tg\left(\frac{1}{2}\sphericalangle BED\right)$ ו - $\frac{1}{2}\sphericalangle BED=26.06^0$ .

תשובה: $\sphericalangle BED=52.12^0$ .

## פתרון שאלה 2

א. המספרים $z_1$ ו - $z_3$ הם קצות קוטר של מעגל אשר המספרים $z_2$ ו - $\overline{z_2}$ נמצאים עליו.

מרכז המעגל נמצא על הישר $y = a \cdot x$ . נניח כי מרכז המעגל הוא בנקודה $M\left(x_M, a \cdot x_M\right)$ ,

מרחק המספר $z_2$ ממרכז המעגל שווה למרחק המספר $\overline{z_2}$ ממרכז המעגל.

נרשום $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$ , $\overline{z_2} = x_2 - y_2 \cdot i$ .

נקבל: $\left(x_2 - x_M\right)^2 + \left(y_2 - a \cdot x_M\right)^2 = \left(x_2 - x_M\right)^2 + \left(-y_2 - a \cdot x_M\right)^2$

פתרון המשוואה נותן $x_M = 0$ ( $y_2 \neq 0$ כי $z_2$ מספר מרוכב), לכן מרכז המעגל בראשית הצירים.

תשובה: משוואת המקום הגיאומטרי היא $x^2 + y^2 = r^2$ (כאשר $r = |z_1| = |z_3| = |z_2|$ ).

ב. נרשום $z_1 = x_1 + ax_1 i$ . כמו כן $z_3 = z_1 \cdot q^2 = z_1 \cdot i^1 = -z_1 = -x_1 - ax_1 i$

$$z_2 = z_1 \cdot q = z_1 \cdot i = -ax_1 + x_1 i$$
$$\overline{z_2} = -ax_1 - x_1 i$$

נביע את אורכי הניצבים במשולש $\Delta z_1 z_2 z_3$ :

$$|z_1 z_2| = \sqrt{\left(x_1 + ax_1\right)^2 + \left(ax_1 - x_1\right)^2} = x_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + 1\right)}$$
$$|z_3 z_2| = \sqrt{\left(x_1 - ax_1\right)^2 + \left(x_1 + ax_1\right)^2} = x_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(a^2 + 1\right)}$$

שטח משולש $\Delta z_1 z_2 z_3$ הוא: $S_{\Delta z_1 z_2 z_3} = \frac{1}{2} \cdot |z_1 z_2| \cdot |z_3 z_2| = x_1^2 \cdot \left(a^2 + 1\right)$

נביע את אורכי הניצבים במשולש $\Delta z_1 \overline{z_2} z_3$ :

$$\left|z_1 \overline{z_2}\right| = \sqrt{\left(x_1 + ax_1\right)^2 + \left(ax_1 + x_1\right)^2} = \sqrt{2} \cdot x_1 \cdot (a+1)$$
$$\left|z_3 \overline{z_2}\right| = \sqrt{\left(x_1 - ax_1\right)^2 + \left(x_1 - ax_1\right)^2} = \sqrt{2} \cdot x_1 \cdot (1-a)$$

שטח משולש $\Delta z_1 \overline{z_2} z_3$ הוא: $S_{\Delta z_1 \overline{z_2} z_3} = \frac{1}{2} \cdot \left|z_1 \overline{z_2}\right| \cdot \left|z_3 \overline{z_2}\right| = x_1^2 \cdot \left(1 - a^2\right)$

נשווה לנתון בשאלה ונקבל:
$$\begin{cases} I) & S_{\Delta z_1 z_2 z_3} = x_1^2 \cdot \left(a^2+1\right) = 42.25 \\ II) & S_{\Delta z_1 \overline{z_2} z_3} = x_1^2 \cdot \left(1-a^2\right) = 30 \end{cases}$$

חלוקת המשוואות זו בזו תיתן $\frac{a^2+1}{1-a^2} = \frac{42.25}{30}$ ונקבל $a = \pm\frac{7}{17}$.

הצבה של $a^2$ באחת המשוואות תיתן $x_1 = \pm\frac{17}{\sqrt{8}}$.

תשובה:

אפשרות א': $z_1 = \frac{17}{\sqrt{8}} + \frac{7}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_2 = -\frac{7}{\sqrt{8}} + \frac{17}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_3 = -\frac{17}{\sqrt{8}} - \frac{7}{\sqrt{8}}i$

אפשרות ב': $z_1 = -\frac{17}{\sqrt{8}} - \frac{7}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_2 = \frac{7}{\sqrt{8}} - \frac{17}{\sqrt{8}}i \quad , \quad z_3 = \frac{17}{\sqrt{8}} + \frac{7}{\sqrt{8}}i$

## פתרון שאלה 3

א. נסמן את צלע בסיס הפירמידה ב - $a$. CE הוא התיכון לצלע AB ואורכו $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

נסמן ב – F את מרכז המעגל החוסם את משולש $\Delta ABC$, נקודה זו היא גם מפגש התיכונים של המשולש

(המשולש שווה צלעות). לכן $CF = \frac{2}{3}\cdot CE = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$.

במשולש $\Delta CFS$ מתקיים $\frac{CF}{CS} = \cos\alpha \leftarrow CF = b\cdot\cos\alpha$ ונקבל, לאחר הצבה של $CF = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot a$

$a = \sqrt{3}\cdot b\cdot\cos\alpha$.

במשולש $\Delta CDE$ אשר בו $\sphericalangle CDE = 90^0$ (נתון), מתקיים $\frac{DE}{CE} = \sin\alpha \leftarrow DE = CE\cdot\sin\alpha$.

לאחר הצבה נקבל: $DE = \frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha$. נחשב עתה את שטח משולש $\Delta ABD$:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}\cdot DE\cdot AB = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha\cdot\sqrt{3}\cdot b\cdot\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot b^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin 2\alpha$$

ב. על פי הנתון אפשר לראות כי $V_{ABCS} = 2\cdot V_{ABCD}$.

לשתי הפירמידות בסיס שווה, $\Delta ABC$, לכן גובה הפירמידה $ABCS$ כפול מגובה הפירמידה $ABCD$.

הגובה מקודקוד D של פירמידה $ABCD$ חותך את מישור הבסיס בנקודה G, במשולש $\Delta DGE$

מתקיים $\frac{DG}{DE} = \cos\alpha$ לכן $DG = DE\cdot\cos\alpha$. נציב את ערכו של DE שמצאנו בסעיף א' ונקבל:

$DG = \frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$.

גובה הפירמידה $ABCS$ מקיים $\frac{SF}{SA} = \sin\alpha$, לכן $SF = b\cdot\sin\alpha$.

נחלק את שני גבהי הפירמידות זה בזה ונשווה ל – 2, נקבל: $\frac{SF}{DG} = \frac{b\cdot\sin\alpha}{\frac{3}{4}\cdot b\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha} = 2$

פתרון המשוואה נותן $\alpha = 54.74^0$.

## פתרון שאלה 4

א. ( I ) פעולת $\ln$ על שני אגפי הפונקציה תיתן $\ln\left[f(x)\right]=\ln\left(x^x\right)=x\cdot\ln x$

( II ) גזירת שני האגפים תיתן $\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$ . נכפול ב - $f(x)$ ונציב לאחר מכן $f(x)=x^x$

ונקבל $f'(x)=f(x)\cdot(1+\ln x)=x^x\cdot(\ln x+1)$ .

ב. ( I ) נציב $g(x)=0$ , $x^x\cdot(1+\ln x)=0$ . הביטוי $x^x$ שונה מאפס לכן נמצא את הפתרון

ל - $1+\ln x=0$ נקבל $x=\frac{1}{e}$

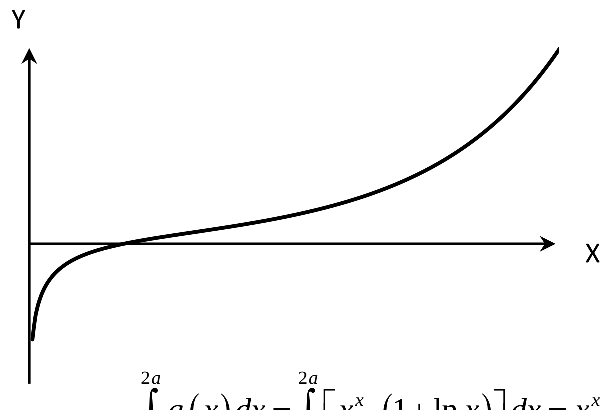
תשובה: $\left(\frac{1}{e},0\right)$

( II ) נראה כי $g'(x)>0$ לכל X.

$$g'(x)=x^x\cdot(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\cdot x^x=x^x\cdot\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]$$

כל גורמי המכפלה חיוביים לכן $g'(x)>0$ והפונקציה $g(x)$ עולה לכל X בתחום הגדרתה.

( III )




ג. $\int_a^{2a} g(x)dx=\int_a^{2a}\left[x^x\cdot(1+\ln x)\right]dx=x^x\Big|_a^{2a}=(2a)^{2a}-a^a$ .

נשווה לאפס נעביר אגפים ונפעיל $\ln$ על שני האגפים, נקבל: $\ln\left[(2a)^{2a}\right]=\ln\left(a^a\right)$ .

פתרון המשוואה נותן $a=\frac{1}{4}$

## פתרון שאלה 5

א. נרשום $a_A = 1 + 0.01 \cdot P$ , $a_B = 1 + 0.02 \cdot P$ , כאשר $a_A$ ו - $a_B$ מייצגים את גורמי הגידול של מון מסוג A ושמירה על טמפרטורה של $30^0 C$ בהתאמה.

משקל הדגים אחרי חודשיים של האכלה בסוג מזון A: $N(2) = N_0 \cdot {a_A}^2$

משקל הדגים אחרי חודשיים (נוספים) של שמירת טמפרטורה: $N(4) = N(2) \cdot {a_B}^2 = N_0 \cdot {a_A}^2 \cdot {a_B}^2$ .

לאחר הצבת הנתונים תתקבל המשוואה: $10,093 = 8,000 \cdot (1 + 0.01P)^2 \cdot (1 + 0.02P)^2$

סידור המשוואה ייתן (אחרי הוצאת שורש ריבועי): $(1 + 0.01P) \cdot (1 + 0.02P) = 1.12322$ .

פתרון המשוואה הוא: $P = 4\%$ .

ב. נציב $N_0 = 10,093$ , $N(2) = 11,991$ ונמצא את גורם הגידול.

$11,991 = 10,093 \cdot a^2$ $\leftarrow$ $a = 1.09$ , כלומר, אחוז הגידול החודשי במשקל הדגים הוא $9\%$ והוא קטן מההשפעה המשולבת $(3P = 12\%)$ .