פתרון שאלה 1

א. נשווה בין הישרים, נקבל $m\cdot x=m^2+3 \leftarrow x=\frac{m^2+3}{m}$ $(*)$.

כמו כן $y=m^2+3 \leftarrow m=\sqrt{y-3}$. נציב ב - $(*)$ ונקבל $x=\frac{\left(\sqrt{y-3}\right)^2+3}{\sqrt{y-3}}=\frac{y}{\sqrt{y-3}}$.

כדי לקבל את y כתלות ב - x נעלה את שני האגפים בריבוע, נקבל:

$x^2=\frac{y^2}{y-3} \leftarrow y^2-x^2y+3x^2=0$.

נפתור את המשוואה הריבועית (נתייחס ל – X כאל פרמטר), נקבל: $y=\frac{x^2\pm\sqrt{x^4-12x^2}}{2}$ ולאחר סידור

נקבל: $y=\frac{1}{2}x\cdot\left(x\pm\sqrt{x^2-12}\right)$.

תשובה: $x=\frac{y}{\sqrt{y-3}}$ או $y=\frac{1}{2}x\cdot\left(x\pm\sqrt{x^2-12}\right)$.

הערה: נזכור כי מקום גיאומטרי לא חייב לקיים את הכלל שלכל איבר בתחום קיים איבר יחיד בטווח.

ב. הנקודה על גרף המקום הגיאומטרי הקרובה ביותר לציר ה – Y היא הנקודה בה שיעור ה – X הוא הקטן ביותר. מהמשוואה $y=\frac{1}{2}x\cdot\left(x\pm\sqrt{x^2-12}\right)$ ניתן לראות כי הערך המינימאלי של X הוא $x=\sqrt{12}$

ולאחר הצבה נקבל $y=6$.

תשובה: הנקודה על גרף המקום הגיאומטרי הקרובה ביותר לציר ה – Y היא הנקודה $\left(\sqrt{12},6\right)$.

הערה: ניתן לקבל תשובה זו גם על ידי גזירת המשוואה $x=\frac{y}{\sqrt{y-3}}$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

א. שני הישרים אינם מקבילים כי וקטורי הכיוון של האחד אינו שווה לכפולה בסקלר של השני.

נבדוק האם יש לישרים נקודה משותפת: $\begin{cases} I) & 1+3t=-5-2s \\ II) & 2-t=2s \\ III) & -5+t=3+s \end{cases}$ $\xrightarrow{(I)+(II)}$ $t=-4 \to s=3$

הצבה במשוואה (III) תיתן פסוק שיקרי, לכן הישרים מצטלבים.

ב. נמצא ראשית את וקטור הכיוון הניצב לשני הישרים:

$$\begin{cases} (A,B,C)\cdot(3,-1,1)=0 \\ (A,B,C)\cdot(-2,2,1)=0 \end{cases} \to \begin{cases} 3A-B+C=0 \\ -2A+2B+C=0 \end{cases} \to A=3, B=5, C=-4$$

קבלנו כי הווקטור $\underset{\sim}{u}=(3,5,-4)$ ניצב לשני הישרים.

כדי למצוא את ההצגה הפרמטרית של l_3 נרשום את ההצגה הפרמטרית של ווקטור הכיוון מנקודה כלשהי

על l_1 לנקודה כלשהי על l_2 ונשווה אותו ל - $k\underset{\sim}{u}$ (k פרמטר). נקבל:

$$\begin{cases} 1+3t-(-5-2s)=3k \\ 2-t-2s=5k \\ -5+t-(3+s)=-4k \end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $k=-1.2,\ s=-2.4,\ t=0.8$.

נציב $s=-2.4$ בהצגה הפרמטרית של l_2 ונקבל את הנקודה $(-0.2,-4.8,0.6)$.

ההצגה הפרמטרית של l_3 היא: $l_3: \underset{\sim}{x}=(-0.2,-4.8,0.6)+m\cdot(3,5,-4)$.

ג. (I) נבחר שני וקטורי כיוון של מישור π: וקטור ראשון הוא וקטור הכיוון של l_3 $(3,5,-4)$ והוקטור

השני הוא וקטור הכיוון מראשית הצירים לנקודה $(-0.2,-4.8,0.6)$, למען הנוחות נכפול וקטור זה

פי 5- $(1,24,-3)$.

נמצא עתה את וקטור הכיוון של מישור π :

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(3,5,-4)=0\\(a,b,c)\cdot(1,24,-3)=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3a+5b-4c=0\\a+24b-3c=0\end{cases}\rightarrow a=81, b=5, c=67$$

מישור π עובר בראשית הצירים, לכן משוואת המישור היא $\pi:81x+5y+67z=0$.

(II) נמצא את הזווית בין וקטור הכיוון של l_1 ווקטור הכיוון של מישור π .

$$\cos\alpha=\frac{(3,-1,1)\cdot(81,5,67)}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11,075}}=\frac{305}{\sqrt{121,825}}\approx 0.874$$

ונקבל $\alpha=29.1^0$.

הזווית בין הישר למישור היא המשלימה לזווית ישרה, כלומר 60.9^0 .

פתרון שאלה 3

א. המספרים $z_1, z_2, w\cdot z_3$ הם שלושה איברים עוקבים בסדרה הנדסית לכן מתקיים $w\cdot z_3\cdot z_1=z_2^2$.

כלומר: $w\cdot rcis\theta_3\cdot rcis\theta_1=r^2\left(cis\theta_2\right)^2$.

לאחר צמצום נקבל

$$w\cdot cis\theta_3\cdot cis\theta_1=\left(cis\theta_2\right)^2$$
$$\downarrow$$
$$w\cdot cis\left(\theta_1+\theta_3\right)=cis\left(2\theta_2\right)$$
$$\downarrow$$
$$w=\frac{cis\left(2\theta_2\right)}{cis\left(\theta_1+\theta_3\right)}=cis\left(2\theta_2-\theta_1-\theta_3\right)$$

ב. המספרים $z_1, z_2, w\cdot z_3$ הם גם שלושה איברים עוקבים בסדרה חשבונית לכן מתקיים (בנוסף)

$w\cdot z_3+z_1=2z_2$. כלומר: $w\cdot rcis\theta_3+rcis\theta_2=2rcis\theta_2$.

לאחר צמצום נקבל $w\cdot cis\theta_3+cis\theta_1=2cis\theta_2$.

נציב את w שהתקבל בסעיף א' ונקבל:

$$cis\left(2\theta_2-\theta_1-\theta_3\right)\cdot cis\theta_3+cis\theta_1=2cis\theta_2$$
$$\downarrow$$
$$cis\left(2\theta_2-\theta_1\right)+cis\theta_1=2cis\theta_2\quad /\div cis\theta_2$$
$$\downarrow$$
$$\frac{cis\left(2\theta_2-\theta_1\right)}{cis\theta_2}+\frac{cis\theta_1}{cis\theta_2}=2$$
$$\downarrow$$
$$cis\left(\theta_2-\theta_1\right)+cis\left(\theta_1-\theta_2\right)=2$$

נעזר בזהות $cis\alpha+cis\left(-\alpha\right)=2\cos\alpha$ ונקבל: $\cos\left(\theta_2-\theta_1\right)=1$ ולכן $\theta_1=\theta_2$.

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה $f\left(x\right)=\ln\left(\sin x\right)$: הפונקציה מוגדרת רק כאשר $\sin x>0$ כלומר $2\pi k<x<\pi+2\pi k$

הפונקציה $g\left(x\right)=\sin\left(\ln x\right)$: הפונקציה מוגדרת כאשר $\ln x$ מוגדר, כלומר: $x>0$.

ב. הפונקציה $f\left(x\right)=\ln\left(\sin x\right)$ שלילית לכל X.

תשובה: גרף א' מייצג את $f\left(x\right)$, גרף ב' מייצג את $g\left(x\right)$.

ג. (I) $f'\left(x\right)=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$. נשווה לאפס ונקבל: $\cos x=0$ $\leftarrow$ $x=\frac{\pi}{2}$. שיעור ה – Y בנקודה

הוא $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln 1=0$. הנגזרת השנייה היא $f''\left(x\right)=-\frac{1}{\sin^2 x}$ $\leftarrow$ $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, נקודת מקסימום.

תשובה: $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

(II) $g'\left(x\right)=\frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}$. נשווה לאפס ונקבל: $\cos\left(\ln x\right)=0$ $\leftarrow$ $\ln x=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$ $\leftarrow$ $x=e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}$.

הנקודה בשרטוט היא הנקודה אשר בה שיעור ה – X הוא הקטן ביותר בתחום $x\geq 0.1$ (קיימות אינסוף נקודות

קיצון בתחום $0<x<0.1$). כדי למצוא את ערכו של k נציב $x=0.1$ ונקבל: $\ln 0.1=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot k$, מתקבל

הערך $k=-1.23$ לכן נקודת הקיצון שבשרטוט היא הנקודה בה $k=-1$. נציב ונקבל:

$x=e^{\frac{\pi}{2}-\pi}=e^{-\frac{\pi}{2}}\approx 0.208$. שיעור ה – Y בנקודה הוא $g\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\left(\ln e^{-\frac{\pi}{2}}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

גזירה שנייה והצבה תיתן נקודת מינימום.

תשובה: $\left(e^{-\frac{\pi}{2}},-1\right)$.

ד. בסעיף ג' (II) קבלנו כי שיעור ה – X של נקודות הקיצון הוא $x=e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}$. נמצא כמה ערכי k (שלמים)

קיימים עבור האי שוויון הבא: $0.008<e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}<120$.

ערך k המתאים לצד שמאל של האי שוויון יתקבל מהקשר $e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}=0.008$, נקבל: $k=-2.04$.

ערך k המתאים לצד ימין של האי שוויון יתקבל מהקשר $e^{\frac{\pi}{2}+\pi k}=120$, נקבל: $k=1.02$.

לכן, ערכי k המתאימים הם $k=-2,-1,0,1$.

תשובה: לפונקציה $g(x)$ יש ארבע נקודות קיצון בתחום $0.008<x<120$.

ה. נמצא את $g''(x)$, $g''(x)=\frac{-\sin(\ln x)-\cos(\ln x)}{x^2}$. השוואה לאפס תיתן $\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=0$.

לאחר חלוקה ב - $\cos(\ln x)$ נקבל $tg(\ln x)=-1 \rightarrow \ln x=\frac{3\pi}{4}+\pi\cdot k \rightarrow x=e^{\frac{3\pi}{4}+\pi k}$.

מסעיף ג' נקבל כי צריך להתקיים $e^{-\frac{\pi}{2}}<x<\frac{\pi}{2}$. לכן נקבל $k=-1 \rightarrow x=e^{-\frac{\pi}{4}}$. שיעור ה – Y בנקודה

הוא $g\left(e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\sin\left(\ln e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

שיפוע הפונקציה בנקודה זו הוא $m=g'\left(e^{-\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\cos\left(\ln e^{-\frac{\pi}{4}}\right)}{e^{-\frac{\pi}{4}}}=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$.

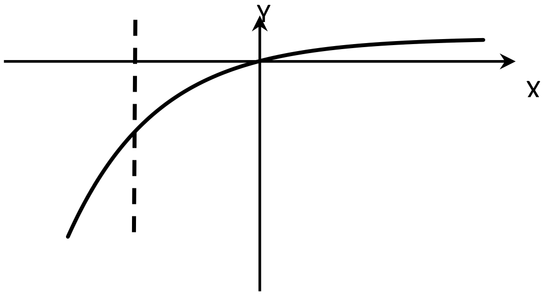
משוואת המשיק בנקודת הפיתול:

$$y+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}\cdot\left(x-e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$y=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{\pi}{4}}}{2}\cdot x-\sqrt{2}\approx 1.55x-\sqrt{2}$$

פתרון שאלה 5



הגרף משמאל מתאר את $f\left(x\right)$ ואת הישר $x=\frac{1}{a}$.

השטח הנתון נמצא כולו מתחת לציר ה – X (ערכו שלילי).

א. על פי הנתון: $\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-e^{ax}\right)dx=-1$ לכן $\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-e^{ax}\right)dx=\left[x-\frac{1}{a}\cdot e^{ax}\right]_{\frac{1}{a}}^{0}=\frac{e-2}{a}$.

נשווה ל – 1- ונקבל $a=2-e$.

ב. נפתור ראשית ללא הצבה של a.

$$V=\pi\cdot\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-e^{ax}\right)^2dx=\pi\cdot\int_{\frac{1}{a}}^{0}\left(1-2e^{ax}+e^{2ax}\right)dx=\pi\cdot\left[x-\frac{2}{a}e^{ax}+\frac{1}{2a}e^{2ax}\right]_{\frac{1}{a}}^{0}$$

לאחר הצבת a וחישוב הגבולות נקבל $V=\pi\cdot\frac{e^2-4e+5}{2\left(e-2\right)}$.

ג. (I) $g\left(x\right)=\int_{-x}^{x+1}\left(1-e^{at}\right)dt=\left[t-\frac{1}{a}\cdot e^{at}\right]_{-x}^{x+1}=2x+1-\frac{1}{a}\cdot\left(e^{a\left(x+1\right)}-e^{-ax}\right)$

(II) $g'\left(x\right)=2-e^{a\left(x+1\right)}-e^{-ax}$

השוואת הנגזרת לאפס והצבת $e^{ax}=k$ תיתן את המשוואה הריבועית $e^ak^2-2k+1=0$.

פתרונות המשוואה: $k_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4e^a}}{2e^a}=\frac{1\pm\sqrt{1-e^a}}{e^a}$.

נרשום $e^{ax_{1,2}}=k_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-e^a}}{e^a}$, פעולת $\ln$ בשני האגפים תיתן $ax_{1,2}=\ln\left(1\pm\sqrt{1-e^a}\right)-a$.

נציב את ערכו של a (מסעיף א') ונקבל: $x_1=0.75$, $x_2\approx-1.75$.