פתרון שאלה 1

א. הנקודה $(0,0)$ היא מרכז אחד המעגלים המשיקים לישר $x=b$ (שרטוט עליון) , לכן $a-R=-b$

(נזכור כי $b<0$).

הנקודה $(0,0)$ היא גם מרכז אחד המעגלים המשיקים לישר $x=2b$ (שרטוט תחתון), לכן $a+R=-2b$.

משתי המשוואות נקבל: $a=3R$, $b=-2R$.

ב. <u>מקרה I (שרטוט עליון):</u> מרכז המעגל הנתון בנקודה $(a,0)$ ומחוגו $\frac{1}{3}a$, הישר (המקווקו) הוא $x=-\frac{2}{3}a$.

נסמן את מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל הנתון ולישר הנתון כ - (x,y).

מחוג המעגל הוא $r=x+\frac{2}{3}a$ ומתקיים: $r+R=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

לאחר הצבה והעלאה בריבוע נקבל: $(x+a)^2=(x-a)^2+y^2$, לאחר פתיחת סוגריים וסידור נקבל את

המקום הגיאומטרי: $y^2=4ax$.

<u>מקרה II (שרטוט תחתון):</u> מרכז המעגל הנתון בנקודה $(a,0)$ ומחוגו $\frac{1}{3}a$, הישר (המקווקו) הוא $x=-\frac{4}{3}a$.

נסמן את מרכזי המעגלים המשיקים מבחוץ למעגל הנתון ולישר הנתון כ - (x,y).

מחוג המעגל הוא $r=x+\frac{4}{3}a$ ומתקיים: $r-R=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$.

לאחר הצבה והעלאה בריבוע נקבל: $(x+a)^2=(x-a)^2+y^2$, לאחר פתיחת סוגריים וסידור נקבל את

המקום הגיאומטרי: $y^2=4ax$.

פתרון שאלה 2

א. וקטורי הכיוון של הישרים, שונים ולכן הם אינם מקבילים. נראה כי הישרים אינם נחתכים:

$$\begin{cases} I) & 1+t=1+2s \\ II) & 3+2t=11-s \\ III) & -6+2t=4+4s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I) & t-2s=0 \\ II) & 2t+s=8 \\ III) & 2t-4s=10 \end{cases}$$

למערכת המשוואות אין פתרון לכן הישרים מצטלבים.

נמצא את משוואת המישור המכיל את הישר l_1 ומקביל לישר l_2:

$$\begin{cases} (A,B,C)\cdot(1,2,2)=0 \\ (A,B,C)\cdot(2,-1,4)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A+2B+2C=0 \\ 2A-B+4C=0 \end{cases} \rightarrow A=2, B=0, C=-1$$

המישור עובר בנקודה $(1,3,-6)$ ומשוואתו היא $\pi_1: 2x-z-8=0$

נמצא עתה את מרחק הנקודה $(1,11,4)$ הנמצאת על הישר l_2 ממישור π_1.

$$d=\frac{|2\cdot 1-4-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\cdot\sqrt{5}$$

ב+ג. הנקודות הקרובות ביותר אחת אל השנייה על הישרים הנתונים הן הנקודות אשר וקטור הכיוון ביניהן שווה לווקטור הכיוון של מישור π_1 מוכפל בסקלר כלשהו.

נרשום את ווקטור הכיוון בין שתי נקודות על הישרים בצורה פרמטרית ונשווה ל $k\cdot(A,B,C)$ (מכפלת סקלר בווקטור הכיוון של המישור).

$$(t-2s, 2t+s-8, 2t-4s-10)=k\cdot(2,0,-1)$$

השוואה בין הרכיבים המתאימים תיתן את הפתרון: $s=0, t=4, k=2$.

הצבה של t ו - s בהצגות הפרמטריות של l_1, l_2 תיתן את הנקודות הנדרשות:

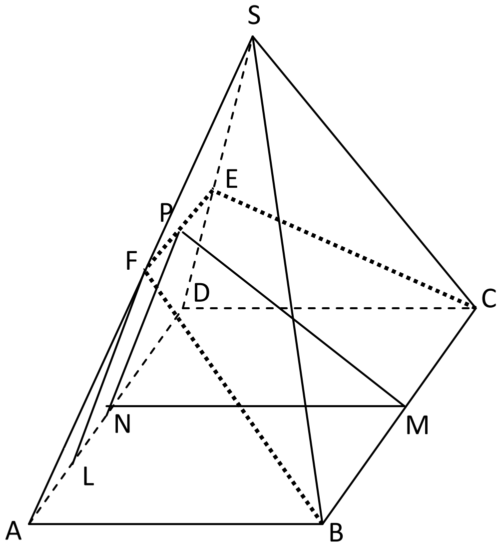
הנקודה על l_1: $(5,11,2)$.

הנקודה על l_2: $(1,11,4)$.

ד. $d=\sqrt{(5-1)^2+(11-11)^2+(2-4)^2}=2\cdot\sqrt{5}$ (כפי שהתקבל בסעיף א').

פתרון שאלה 3

הערה: לא מצוין במפורש בנתוני השאלה כי $FE \parallel AD$, כדי להוכיח זאת יש להראות כי זהו תנאי הכרחי לקיום המישור BCEF (הנקודות B , C , E ו – F נמצאות על מישור אחד!).



א. נסמן: M – אמצע BC, P - אמצע EF, N – אמצע AD

L – נקודה על AD כך ש - $FL \parallel PN$, $\sphericalangle NMS = \beta$.

נתון: $\sphericalangle NMP = \alpha$. אורך כל מקצוע, a .

$SM = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (פיתגורס).

$\cos\beta = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}$

במשולש ΔPNM : $\sphericalangle N = \beta \rightarrow \sphericalangle P = 180^0 - (\alpha+\beta)$. ממשפט הסינוסים: $\frac{PN}{\sin\alpha} = \frac{PM}{\sin\beta} = \frac{NM}{\sin\sphericalangle P}$.

לאחר הצבה וסידור תוך שימוש ב – $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, נקבל:

$PM = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$, $FL = PN = \frac{\sqrt{3}a\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha}$.

במשולש ΔALF – $\sphericalangle A = 60^0$, $\sphericalangle L = 90^0$ לכן: $\frac{AL}{FL} = \tan 30^0 \rightarrow AL = FL \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha + \sin\alpha}$

כמו כן $EF = 2\cdot LN = 2\cdot\left(\frac{1}{2}a - AL\right) = a - \frac{2a\sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha} = a\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha}$

שטח הטרפז הוא:

$$S_{BCEF} = \frac{1}{2}\cdot(EF+BC)\cdot PM = \frac{1}{2}\cdot\left(a\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha} + a\right)\cdot\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2a^2\cos\alpha}{\left(\sqrt{2}\cos\alpha+\sin\alpha\right)^2}$$

ב. עבור $\measuredangle NPM = 90^0$ נקבל כי $\sin\alpha = \cos\beta$, לכן: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \leftarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$. לאחר הצבה בנוסחת

שטח הטרפז, נקבל: $S_{BCEF} = \sqrt{\frac{8}{27}} \cdot a^2$.

פתרון שאלה 4

א.
$$S_1 = \int_0^a \left(e^x - e^{-x}\right)dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^a = e^a + e^{-a} - 2$$
$$S_2 = \int_0^a e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^a = 1 - e^{-a}$$

ב. (I) $h(a) = S_1 - S_2 = e^a + 2e^{-a} - 3$

נגזור ונקבל: $h'(a) = e^a - 2\cdot e^{-a}$. נציב $e^a = t$, נשווה ל – 0 ונקבל: $t - \frac{2}{t} = 0 \leftarrow t = \sqrt{2}$.

לכן $a = \ln\sqrt{2}$.

ג. $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{e^a + e^{-a} - 2}{1 - e^{-a}} = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

פתרון שאלה 5

א. נחשב את זמן מחצית החיים בשני המצבים הקיצוניים.

מצב 1: משקל התחלת 101 גרם, משקל אחרי 24 ימים 49 גרם.

$$T_{\frac{1}{2}\min} = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.970312} = 23_d \leftarrow q_1 = 0.970312 \leftarrow 49 = 101 \cdot q_1^{24}$$

מצב 2: משקל התחלתי 99 גרם, משקל אחרי 24 ימים 51 גרם.

$$T_{\frac{1}{2}\max} = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.97274} = 25.08_d \leftarrow q_2 = 0.97274 \leftarrow 51 = 99 \cdot q_2^{24}$$

תשובה: טווח הזמן של מחצית החיים הוא: $23_d \le T_{\frac{1}{2}} \le 25.08_d$.

ב. חישוב הזמן עבור q_1: $t = 52.4_d \leftarrow 41 = 199 \cdot 0.970312^t$.

חישוב הזמן עבור q_2: $t = 59.33_d \leftarrow 39 = 201 \cdot 0.97274^t$.

הערה: גם כאן נלקחו מצבי הקיצון של מדידת המשקל.

תשובה: $52.4_d \le t \le 59.33_d$