פתרון שאלה 1

א. נשווה את ההצגות הפרמטריות של נקודות על הישרים:

$$\begin{cases} I) & 3+4t=1+5s \\ II) & k+t=-4-3s \\ III) & 2+tk=k+9s \end{cases} \xrightarrow[3II+III]{3I+5II} \begin{cases} I) & 17t+5k+26=0 \\ II) & 3t+tk+2k+14=0 \end{cases} \xrightarrow{I)\ k=\frac{-17t-26}{5}} 3t-(t+2)\cdot\frac{17t+26}{5}+14=0$$

פתרונות המשוואה האחרונה והתנאי $k>0$ יתנו את הפתרונות: $t=-3, k=5, s=-2$

שיעורי נקודה A הם: $A(-9,2,-13)$.

ב. נסמן את וקטור הכיוון של l_3 כ - (a,b,c), מתקיים:

$$\begin{cases} I) & (a,b,c)\cdot(4,1,5)=0 \\ II) & (a,b,c)\cdot(5,-3,9)=0 \end{cases}$$

פתרון המערכת נותן: $(a,b,c)=(24,-11,-17)$ וההצגה הפרמטרית של l_3 היא:

$$l_3: \underset{\rightarrow}{x}=(-9,2,-13)+r\cdot(24,-11,-17)$$

ג. (I) נמצא ראשית את הזווית בין הישרים l_1 ו - l_2:

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{986}{4830}} \leftarrow \cos\alpha=\frac{(4,1,5)\cdot(5,-3,9)}{|4,1,5|\cdot|5,-3,9|}=\frac{62}{\sqrt{4830}}$$

שטח הבסיס (מלבן) הוא: $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{986}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt[4]{4830}^2\cdot\sqrt{\frac{986}{4830}}=S$.

נמצא עתה את גובה הפירמידה: $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot h \rightarrow h=\frac{3\cdot 164\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{986}}=\sqrt{986}$

נמצא על הישר l_3 נקודה (E) שמרחקה מנקודה A שווה לגובה הפירמידה:

$\sqrt{(24r)^2+(11r)^2+(17r)^2}=h \rightarrow \sqrt{986}\cdot r=h$ ונקבל $r=\pm1$.

הצבה תיתן את שתי האפשרויות הבאות: $E(15,-9,-30)$ או $E(-33,13,4)$.

ד. מטריגונומטריה (בסיסית) נקבל: $\tan\alpha=\frac{AE}{AB}$. הצבת הערכים תיתן $\alpha\approx 82.44^0$

פתרון שאלה 2

א. $Z_{1,2}=\frac{m-2\pm\sqrt{(2-m)^2+8m}}{2}=\frac{m-2\pm(m+2)}{2}$

על פי הנתון Z_1 ממשי, לכן: $Z_1=-2$, $Z_2=m$

ב. נרשום: $Z_1\cdot Z_2=-2m$, $W_1\cdot W_2=8m$ (משוואות וייטה).

כמו כן: $Z_1=a_1$, $Z_2=a_1q$, $W_1=a_1q^2$, $W_2=a_1q^3$, נקבל:

$\frac{W_1\cdot W_2}{Z_1\cdot Z_2}=\frac{8m}{-2m}=q^4$ לכן: $q^4=-4$.

לאחר מעבר להצגה טריגונומטרית והוצאת שורש רביעי נקבל: $q=\sqrt{2}\cdot cis\left(45^0+90^0k\right)$.

מאחר ונתון כי q ברביע הראשון, הרי ש - $q=\sqrt{2}\cdot cis45^0=1+i$.

נמצא את הפרמטר m מהקשר $q=\frac{Z_2}{Z_1}$: נקבל $1+i=-\frac{m}{2}$, לכן: $m=-2-2i$.

ג. $W_1=Z_2\cdot q=m\cdot(1+i)=-2\cdot(1+i)^2=-4i$

$W_2=W_1\cdot q=-4i\cdot(1+i)=4-4i$

ד. נשרטט את המשולש במערכת צירים ונראה כי: $S_{\Delta W_1W_2Z_2}=4$.

פתרון שאלה 3

א. הפירמידה ישרה, לכן כל מקצועותיה שווים והגובה SO 'נופל" על אמצע AC – כלומר BO הוא התיכון ל – AC.

נסמן: $AC = a \leftarrow AO = BO = CO = \frac{1}{2}a$

נקבל: $\cot\alpha = \frac{1}{2}\ ,\ \cot\beta = \frac{1}{2}\ ,\ \cot\gamma = \frac{1}{2}$

$$\Downarrow$$

$$\cot^2\alpha + \cot^2\beta + \cot^2\gamma = \frac{3}{4}$$

ב. ממשפט פיתגורס: $AS = \sqrt{(AO)^2 + (SO)^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2} \leftarrow BS = AS$.

במשולש ABS (שווה שוקיים), $\sphericalangle ASB = 180^0 - 4\alpha$. ממשפט הסינוסים נקבל:

$$\frac{AS}{\sin 2\alpha} = \frac{AB}{\sin\left(180^0 - 4\alpha\right)} \leftarrow AB = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a\cdot\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = \sqrt{5}a\cdot\cos 2\alpha$$

במשולש ABC נקבל (פיתגורס): $BC = \sqrt{(AC)^2 - (AB)^2} = \sqrt{a^2 - 5a^2\cos^2 2\alpha} = a\cdot\sqrt{1-5\cos^2 2\alpha}$

נפח הפירמידה הוא: $V_{ABCS} = \frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SO$ ולאחר הצבה נקבל

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}a\cdot\cos 2\alpha\cdot a\cdot\sqrt{1-5\cos^2 2\alpha}\cdot a = \frac{\sqrt{5}}{6}a^3\cdot\cos 2\alpha\cdot\sqrt{1-5\cos^2 2\alpha}$$

פתרון שאלה 4

א. (I) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = a^{-\infty} - b = -b$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = b^{\infty} - a = -a$

(II) חיתוך ציר Y: $f(0) = 1-b$, $g(0) = 1-a$

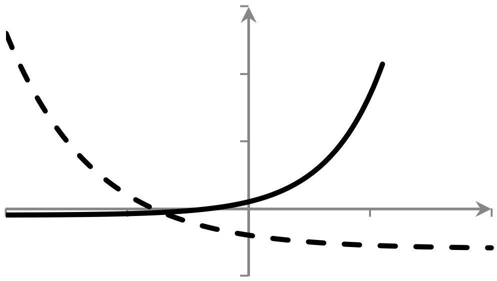
חיתוך ציר X: $f(x) = 0$: $a^x - b = 0 \leftarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$, $g(x) = 0$: $b^x - a = 0 \leftarrow x = \frac{\ln a}{\ln b}$

תשובה: $f(x): (0, 1-b), \left(\frac{\ln b}{\ln a}, 0\right)$, $g(x): (0, 1-a), \left(\frac{\ln a}{\ln b}, 0\right)$

(III) המרחק על ציר ה – X: $\Delta X = \frac{\ln a}{\ln b} - \frac{\ln b}{\ln a}$

המרחק על ציר ה – Y: $\Delta Y = a - b$

(IV)



ב. (I) הפונקציה $g(x)$ יורדת בכל תחום הגדרתה, לכן נגזרתה שלילית. ללא הערך המוחלט, הפונקציה $P(x)$ לא הייתה מוגדרת כלל.

(II) $h(x) = \ln\left[f'(x)\right] = \ln\left(a^x \cdot \ln a\right)$

חיתוך ציר X: $\ln\left(a^x \cdot \ln a\right) = 0 \rightarrow a^x \cdot \ln a = 1 \rightarrow \ln\left(a^x\right) + \ln(\ln a) = 0 \rightarrow x = \frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}$

חיתוך ציר Y: $h(0) = \ln\left(a^0 \cdot \ln a\right) = \ln(\ln a)$

תשובה: $\left(0, \ln(\ln a)\right)$, $\left(\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}, 0\right)$

(III)   עבור $a>e$ נקודת החיתוך עם ציר ה – X היא שלילית ונקודת החיתוך עם ציר ה – Y חיובית,

כלומר השטח הנדרש נמצא ברביע השני. נרשום את האינטגרל:

$$S=\int_{\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}}^{0}\left[\ln\left(a^{x}\cdot\ln a\right)\right]dx=\left[\frac{1}{2}\ln a\cdot x^{2}+\ln\left(\ln a\right)\cdot x\right]_{\frac{-\ln(\ln a)}{\ln a}}^{0}=\frac{\ln^{2}\left(\ln a\right)}{2\ln a}$$

נמצא את ערכו של a עבורו מתקבל שטח מקסימלי (גזירת פונקציית השטח לפי a), נקבל:

$$S'_{(a)}=\frac{4\ln\left(\ln a\right)-2\ln^{2}\left(\ln a\right)}{4a\cdot\ln^{2}a}$$

נציב $\ln\left(\ln a\right)=t$, נשווה ל – 0 ונקבל $2t-t^{2}=0 \leftarrow t_1=0$, $t_2=2$

עבור $t=0$ נקבל $a=e$ (לא בתנאי).

עבור $t=2$ נקבל $a=e^{\left(e^{2}\right)}$.

פתרון שאלה 5

א. (I) כל X.

(II) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ לכן יש לפונקציה אסימפטוטה אופקית $y=0$ עבור $x\to\infty$.

(III) חיתוך ציר X: $x^3-ax^2=0 \leftarrow x_1=0\ ,\ x_2=a \leftarrow (0,0)\ ,\ (a,0)$

(IV) נגזור את הפונקציה: $f'(x)=\frac{(3x^2-2ax)\cdot e^x-e^x\cdot(x^2-ax^2)}{(e^x)^2}=\frac{-x\cdot(x^2-(3+a)x+2a)}{e^x}$

השוואה ל – 0 תיתן: $x\cdot(x^2-(3+a)x+2a)=0$.

פתרונות המשוואה הם $x_1=0\ ,\ x^2-(3+a)x+2a=0$

פתרון המשוואה הריבועית: $x_{2,3}=\frac{3+a\pm\sqrt{(3+a)^2-8a}}{2}=\frac{3+a\pm\sqrt{(a-1)^2+8}}{2}$

הביטוי מתחת לסימן השורש חיובי לכל a לכן יש 3 ערכי X עבורם נגזרת הפונקציה מתאפסת.

ב. (I) נמצא את משוואת המשיק.

שיפוע המשיק בנקודה $(a,0)$: $f'(a)=\frac{-a\cdot(a^2-(3+a)\cdot a+2a)}{e^a}=\frac{a^2}{e^a}$.

ומשוואת המשיק היא $y=\frac{a^2}{e^a}\cdot(x-a)$

נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים הן $\left(0,-\frac{a^3}{e^a}\right)\ ,\ (a,0)$ ושטח המשולש המתקבל הוא $S_\Delta=\frac{a^4}{2e^a}$.

השוואה לנתון תיתן את המשוואה $\frac{8}{e^2}=\frac{a^4}{2e^a}$ שאחד מפתרונותיה הוא $a=2$.

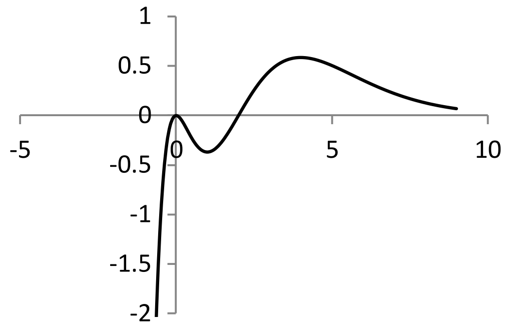
הערה: קיים פתרון נוסף $a\approx 7.026$.

(II) הצבת $a=2$ בסעיף א' IV תיתן שלוש נקודות בהן $f'(x)=0$:

את סוג הנקודות נקבע על ידי גזירה שנייה (של המונה בלבד – המכנה חיובי לכל X), נקבל:

$$\left(4,32\cdot e^{-4}\right)_{\max}\ ,\ \left(1,-e^{-1}\right)_{\min}\ ,\ \left(0,0\right)_{\max}$$

(III)



ג. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה – X הן שיעורי ה – X של נקודות הקיצון של $f(x)$,

לכן השטח המוגבל נתון בביטוי הבא:

$$S=\int_1^4 f'(x)dx-\int_0^1 f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^4+\left[f(x)\right]_1^0=f(4)+f(0)-2f(1)=32\cdot e^{-4}+2\cdot e^{-1}\approx 1.322$$