<u>פתרון שאלה 1</u>

נרשום את הצורה הכללית של משוואת אליפסה קנונית: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \leftarrow y=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}$.

שיפוע המשיק (המקביל לישר העובר בראשית) הוא: $\sqrt{3\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{24}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}}=m$.

גזירה של Y תיתן $y'=-\frac{\frac{b^2}{a^2}\cdot x}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}}$

גזירה סתומה של משוואת האליפסה תיתן $0=\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2} \leftarrow y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$

נשווה את השיפוע, m ל - $y'(y=6)$ וכן, נציב את הנקודה $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5},\sqrt{24}\right)$ במשוואת האליפסה, ונשווה את y'

ל - m , נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} -\frac{b^2x}{6a^2}=\sqrt{3\frac{1}{3}} \\ \frac{36}{5a^2}+\frac{24}{b^2}=1 \\ -\frac{\frac{b^2}{a^2}\cdot x}{\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2}}=\sqrt{3\frac{1}{3}} \end{cases}$$

פתרון המערכת ייתן $a^2=12, b^2=60$ ומשוואת האליפסה היא $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{60}=1$.

פתרון שאלה 2

א. נסמן ב – E את אמצע הצלע BC. שיעורי הנקודה E הם: $E\left(18,51,0\right)$. מתקיימים שני תנאים:

(I) $x_C=0=2x_E-x_B$, $y_C=2y_E-y_B$, $z_C=0=2z_E-z_B$ (אמצע קטע).

לאחר הצבה נקבל: $C\left(0,102-y_B,0\right)$ וכן $x_B=36$

(II) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ (הישרים ניצבים זה לזה).

נקבל: $\left(x_B,y_B,0\right)\cdot\left(36-2x_B,102-2y_B,0\right)=0 \leftarrow 0=\left(36,y_B,0\right)\cdot\left(-36,102-2y_B,0\right)$.

מתקבלת המשוואה הריבועית $y_B^2-51y_B+648=0$ שפתרונותיה הם: $y_{B_1}=24$, $y_{B_2}=27$.

תשובה: אפשרות א': $C\left(0,78,0\right)$, $B\left(36,24,0\right)$

אפשרות ב': $C\left(0,75,0\right)$, $B\left(36,27,0\right)$

ב. שיעורי קודקוד A' הם: $A'\left(0,0,90\right)$.

אפשרות א': $A'\left(0,0,90\right),B\left(36,27,0\right),C\left(0,75,0\right) \rightarrow \overrightarrow{A'B}=\left(4,3,-10\right)$, $\overrightarrow{A'C}=\left(0,5,-6\right)$

נמצא את ווקטור הכיוון של המישור: $\begin{cases}\left(a,b,c\right)\cdot\left(4,3,-10\right)=0\\ \left(a,b,c\right)\cdot\left(0,5,-6\right)=0\end{cases}$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $\left(a,b,c\right)=\left(8,6,5\right)$ ולאחר הצבת הנקודה $A'\left(0,0,90\right)$ במשוואת המישור

נקבל: $\pi:\underset{\rightarrow}{x}=8x+6y+5z-450=0$

אפשרות ב': $A'\left(0,0,90\right),B\left(36,24,0\right),C\left(0,78,0\right) \rightarrow \overrightarrow{A'B}=\left(6,4,-15\right)$, $\overrightarrow{A'C}=\left(0,13,-15\right)$

נמצא את ווקטור הכיוון של המישור: $\begin{cases}\left(a,b,c\right)\cdot\left(6,4,-15\right)=0\\ \left(a,b,c\right)\cdot\left(0,13,-15\right)=0\end{cases}$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $\left(a,b,c\right)=\left(45,30,26\right)$ ולאחר הצבת הנקודה $A'\left(0,0,90\right)$ במשוואת

המישור נקבל: $\pi:\underset{\rightarrow}{x}=45x+30y+26z-2340=0$.

ג. ההצגה הפרמטרית של $\overrightarrow{AD}$ היא: $\overrightarrow{AD}: t\cdot(6,17,15)$.

אפשרות א': המישור $\pi: \underset{\rightarrow}{x} = 8x+6y+5z-450=0$

נציב הצגה פרמטרית של נקודות הישר במשוואת המישור, נקבל $48t+102t+75t-450=0 \leftarrow t=2$

נקודת החיתוך של הישר והמישור היא $P(12,34,30)$.

אפשרות ב': המישור $\pi: \underset{\rightarrow}{x} = 45x+30y+26z-2340=0$

נציב הצגה פרמטרית של נקודות הישר במשוואת המישור, נקבל $270t+510t+390t-2340=0 \leftarrow t=2$

נקודת החיתוך של הישר והמישור היא $P(12,34,30)$.

קבלנו בשני המקרים את אותה נקודת החיתוך!

ד. למנסרה ולפירמידה בסיס משותף. גובה הפירמידה הוא שליש מגובה המנסרה (בשני המקרים),

לכן היחס בין נפח הפירמידה לנפח המנסרה הוא $1\div 4.5$.

פתרון שאלה 3

א. פאות הצד של הפירמידה הן משולשים שווי צלעות.

נסמן ב - a את אורכי מקצועות הפירמידה. נסמן ב – M את אמצע מקצוע AC, הזווית בין שתי פאות צד

סמוכות היא הזווית $\alpha = \sphericalangle BMD$.

במשולש ΔBMD הצלעות הן: $BD = \sqrt{2}\cdot a$, $BM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$.

ממשפט הקוסינוסים נקבל: $(BD)^2 = (BM)^2 + (DM)^2 - 2\cdot(BM)\cdot(DM)\cdot\cos\alpha$

ולאחר הצבה נקבל: $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$.

ב. גובה הפירמידה $ABCDS$ (משפט פיתגורס) הוא $h = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot a$.

גובה הפירמידה $EFGHS$ (דמיון משולשים) הוא $h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b$ ($b = EF$).

גובה הפירמידה $EFGHO$ (חיסור) הוא $h_2 = h - h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(a-b)$.

נפח פירמידה $EFGHO$ הוא $V(b) = \frac{1}{3}\cdot b^2\cdot h_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot(ab^2 - b^3)$.

נפח מקסימלי יתקבל עבור $V'(b) = 0$, לאחר גזירה והשוואה ל – 0 נקבל: $b = \frac{2}{3}\cdot a \Leftarrow h_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot a$.

אורך מקצוע הפירמידה $EFGHO$ (משפט פיתגורס) הוא $l^2 = h_2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2 = \frac{5}{18}\cdot b^2$

לכן $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{1}{2}b}{l} = \sqrt{\frac{2}{5}} \Leftarrow \cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} \Leftarrow \cos\beta = \frac{1}{5}$

והיחס המבוקש הוא $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{5}$.

פתרון שאלה 4

א. הפונקציה $g(x)$ מוגדרת עבור $x=0 \leftarrow g(0)=0$ לכן גרף א' שייך ל - $g(x)$.

לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון ב - $x=\frac{3}{4}\pi$ (לפי $f'(x)=0 \leftarrow \cot x+1=0$) לכן גרף ג' שייך ל - $f(x)$.

ב. $f'(x)=\cot x+1 \leftarrow f'(x)=0 \leftarrow x=\frac{3}{4}\pi \leftarrow f\left(\frac{3}{4}\pi\right)\approx 2$

ל - $f(x)$ יש קיצון בנקודה $\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$.

$g'(x)=-\tan x+1 \leftarrow g'(x)=0 \leftarrow x=\frac{1}{4}\pi \leftarrow g\left(\frac{1}{4}\pi\right)\approx 0.44$

ל - $g(x)$ יש קיצון בנקודה - $\left(\frac{\pi}{4},0.44\right)$.

ג. $$\frac{2-f'(x)}{1-f'(x)}=\frac{2-(\cot x+1)}{1-(\cot x+1)}=\frac{1-\cot x}{-\cot x}=-\tan x+1=g'(x)$$

ד. על פי הנתון $h(x)=f(x)+g(x)$ לכן $h'(x)=f'(x)+g'(x)$.

מסעיף ג' $g'(x)=\frac{2-f'(x)}{1-f'(x)}$ ולאחר הצבת $f'(x)=\sqrt{2}$ נקבל: $g'(x)=\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

לכן $h'(x)=f'(x)+g'(x)=\sqrt{2}+\frac{2-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=0$.

הערה: קיימת אפשרות כי זו נקודת פיתול של $h(x)$ (פיתול שבו מתקיים גם $h'(x)=0$), אך לפי השרטוט לא קיימת נקודה כזו.

פתרון שאלה 5

א. האסימפטוטה $x=\ln 2$ מתקיימת כאשר $e^{2\ln 2}+b=0$ לכן $b=-4$.

האסימפטוטה $y=1\frac{1}{4}$ מתקיימת עבור $x\to-\infty$ ומתקבל $\frac{a}{b}=1\frac{1}{4}$, לכן $a=-5$.

ב. $f(x)=\frac{1\frac{1}{4}\cdot e^{x}-5}{e^{2x}-4}$. (I) נקודות החיתוך עם הצירים הן: $(\ln 4,0)$, $(0,1\frac{1}{4})$.

(II) $$f'(x)=\frac{1\frac{1}{4}\cdot e^{x}\cdot\left(e^{2x}-4\right)-2\cdot e^{2x}\cdot\left(1\frac{1}{4}\cdot e^{x}-5\right)}{\left(e^{2x}-4\right)^{2}}=\frac{-e^{x}\cdot\left(1\frac{1}{4}\cdot e^{2x}-10\cdot e^{x}+5\right)}{\left(e^{2x}-4\right)^{2}}$$

לאחר השוואה ל – 0 נקבל את הנקודות: $\left(\ln\left(4+\sqrt{12}\right),0.0837\right)_{\max}$, $\left(\ln\left(4-\sqrt{12}\right),1.166\right)_{\min}$.

קביעת סוג נקודת הקיצון יכולה להיעשות ע"י גזירה נוספת של המונה בלבד (המכנה חיובי).

(III) לפונקציה יש אס' אופקית נוספת עבור $x\to\infty$: $y=0$ (דרגת המכנה גבוהה מדרגת המונה).

ג. הערה: רצוי לשרטט סקיצה של גרף הפונקציה כדי לענות על סעיף זה.

$0<k<0.0837$ או $1.166<k<1.25$.

ד. (I) נתון: $$\begin{cases} I) & M(3)-M(5)=20,450 \\ II) & M(5)-M(9)=25,450 \\ III) & M(10)=23,625 \end{cases}$$

ממשוואות (I) ו – (II) נקבל:

$$\begin{cases} I) & M_0\cdot q^3-M_0\cdot q^5=20,450 \\ II) & M_0\cdot q^5-M_0\cdot q^9=25,450 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} I) & M_0\cdot q^3\cdot\left(1-q^2\right)=20,450 \\ II) & M_0\cdot q^5\cdot\left(1-q^4\right)=25,450 \end{cases}$$

חלוקת המשוואות תיתן: $\frac{(II)}{(I)}=q^2\cdot\left(1+q^2\right)=\frac{509}{409}$.

פתרון המשווה הוא $q=0.85$.

תשובה: מחיר הרכב קטן ב – 15% בכל שנה.

(II) ממשוואה (III) נקבל $M_0=\frac{23,625}{0.85^{10}}=120,000$