פתרון שאלה 1

א. שיעורי המוקדים הם: $F_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$, $F_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0\right)$.

משוואת הישר העובר דרך המוקד הימני: $F_1 : y = a\cdot x - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

משוואת הישר העובר דרך המוקד השמאלי: $F_2 : y = \frac{1}{2}a\cdot x + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

נקודת החיתוך של שני הישרים היא: $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}a, \sqrt{3}a^2\right)$.

נרשום $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$, $y = \sqrt{3}a^2$ $\leftarrow$ $\frac{y}{x^2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{\frac{27}{4}a^2} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$, והמקום הגיאומטרי של הנקודות A

הוא: $y = \frac{4\sqrt{3}}{27}\cdot x^2$.

ב. $d_{F_1F_2} = \sqrt{3}a$, $d_{F_1A} = \sqrt{3a^2+3a^4}$

על סמך הנתון נקבל $\sqrt{3a^2+3a^4} = 5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}a$ $\leftarrow$ $a^2\left(a^2-49\right)=0$ $\leftarrow$ $a^2 = 49$

ומשוואת האליפסה היא: $\frac{x^2}{49}+\frac{4y^2}{49}=1$.

פתרון שאלה 2

א. הישר ניצב למישור רק אם וקטור הכיוון של הישר ניצב לכל אחד מוקטורי הכיוון של המישור, כלומר:

$$\begin{cases}(n,n+2,-4)\cdot(1,m,1)=0\\(n,n+2,-4)\cdot(-2,m+1,m)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}n+mn+2m-4=0\\-2n+mn+2m+n+2-4m=0\end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן את הפתרונות: $(n_1,m_1)=(1,1)$, $(n_2,m_2)=(2,\frac{1}{2})$.

ב. (I) נציב $n=1$ ונרשום את מרחק הישר $l:\underset{\rightarrow}{x}=(1,3,2)+t\cdot(1,3,-4)$ מראשית הצירים.

$(1+t)^2+(3+3t)^2+(2-4t)^2=13 \rightarrow 26t^2+4t+1=0$. למשוואה אין פתרון (ממשי).

נציב $n=2$ ונרשום את מרחק הישר $l:\underset{\rightarrow}{x}=(1,3,2)+t\cdot(2,4,-4)$ מראשית הצירים (נשווה ל - $\sqrt{13}$)

$(1+2t)^2+(3+4t)^2+(2-4t)^2=13 \rightarrow 36t^2+12t+1=0 \rightarrow t=-\frac{1}{6}$.

(קבלנו שיש על הישר נקודה שמרחקה $\sqrt{13}$ מהראשית. נבדוק עתה כי וקטור הכיוון מהראשית לנקודה זו,

ניצב לישר l).

שיעורי הנקודה הם: $\left(\frac{2}{3},2\frac{1}{3},2\frac{2}{3}\right)=(1,3,2)-\frac{1}{6}\cdot(2,4,-4)$.

נבדוק ניצבות: $\left(\frac{2}{3},2\frac{1}{3},2\frac{2}{3}\right)\cdot(2,4,-4)=\frac{4}{3}+9\frac{1}{3}-10\frac{2}{3}=0$, הישרים ניצבים.

תשובה: $n=2$, $m=\frac{1}{2}$.

(II)
$$l: \quad \underset{\rightarrow}{x}=(1,3,2)+t\cdot(1,2,-2)$$
$$\pi_1: \quad x+2y-2z+24=0$$

(III) נקודת החיתוך של מישור π_1 עם ציר Z היא $(0,0,12)$.

נקודת החיתוך של הישר l ומישור π_1: $1+t+2(3+2t)-2(2-2t)+24=0 \Leftarrow t=-3 \Leftarrow (-2,-3,8)$

ישר החיתוך של המישורים π_1 ו - π_2 הוא הישר המחבר את נקודת החיתוך לעיל עם הנקודה המשותפת לשני המישורים על ציר Z. וקטור הכיוון של ישר זה הוא $(2,3,4)$.

לכן שני וקטורי כיוון של π_2 הם: $(1,2,-2),(2,3,4)$, ונקודה דרכה עובר המישור היא $(0,0,12)$.

ומשוואת המישור היא $\pi_2: 14x-8y-z+12=0$.

פתרון שאלה 3

א. אם $z_1 = 3cis270^0 = -3i$ הוא אחד מפתרונות המשוואה, הרי שניתן לחלק את המשוואה ב - $z+3i$

ולקבל תוצאה ללא שארית. נבצע חילוק ארוך:

$$\begin{array}{l}
\quad z^2 - 2z + 2 \\
\hline
\quad z^3 + (3i-2)z^2 + (2-6i)z + 6i \,\big|\, (z+3i) \\
- \\
\quad z^3 + 3iz^2 \\
-------- \\
\quad -2z^2 + (2-6i)z + 6i \\
- \\
\quad -2z^2 - 6iz \\
-------- \\
\quad\; 2z + 6i \\
- \\
\quad\; 2z + 6i \\
------ \\
\qquad 0
\end{array}$$

נמצא את פתרונות המשוואה $z^2 - 2z + 2 = 0$, נקבל: $z_{2,3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = \begin{matrix} \nearrow & z_2 = 1+i \\ \searrow & z_3 = 1-i \end{matrix}$

תשובה: $z_1 = 3cis270^0$, $z_2 = \sqrt{2}cis45^0$, $z_3 = \sqrt{2}cis315^2$

ב. (I) צריך להתקיים $\dfrac{z_2}{z_3} = \dfrac{z_1 \cdot w}{z_2} \leftarrow w = \dfrac{z_2^2}{z_1 \cdot z_3}$

הצבה תיתן: $w = \dfrac{2cis90^0}{3\sqrt{2}cis225^0} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}cis225^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\dfrac{1}{3}\cdot(1+i)$

(II) האיבר הראשון בסדרה (רביע שני) הוא $a_1 = z_1 \cdot w = \sqrt{2}cis135^0$ והאיבר השני בסדרה (רביע ראשון)

הוא $a_2 = z_2 = \sqrt{2}cis45^0$. מנתהסדרה היא $q = cis270^0 = -i$ סכום עשרת האיברים הראשונים הוא

$$S_{10} = \frac{\sqrt{2}cis135^0 \cdot \left(cis270^0\right)^{10} - \sqrt{2}cis135^0}{cis270^0 - 1} = \frac{\sqrt{2}\left(cis315^0 - cis135^0\right)}{\sqrt{2}cis225^0} = 2i$$

פתרון שאלה 4

א. $f'(x) = -\frac{a}{x^2} \rightarrow f'(x_1) = -\frac{a}{x_1^2}$

מתקיימים שני תנאים: $\begin{cases} I) & -\frac{a}{x_1^2} = b \\ II) & \frac{a}{x_1} = bx_1 + c \end{cases} \rightarrow c^2 = -4ab$

ב. נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה – X: $0 = bx_2 + c \rightarrow x_2 = -\frac{c}{b}$.

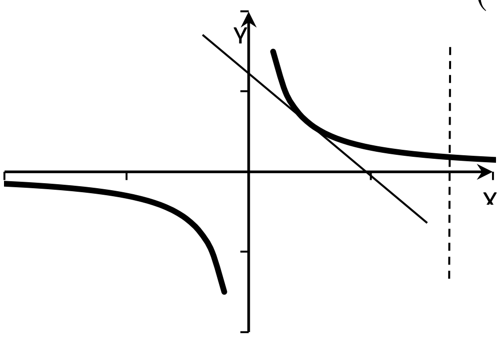
מהתנאים בסעיף א' נקבל: $\begin{cases} I) & \frac{a}{b} = -x_1^2 \\ II) & \frac{a}{b} = x_1^2 + \frac{c}{b}x_1 \end{cases}$

השוואת שני הביטויים תיתן: $-x_1^2 = x_1^2 + \frac{c}{b}x_1 \rightarrow \frac{c}{b} = -2x_1$

לכן, נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה – X היא: $(2x_1, 0)$.

ג. השטח המוגבל על ידי המשיק, ציר ה – X,

גרף הפונקציה והישר $x = e^{2.5} \cdot x_1$ הוא:



$$S = \int_{x_1}^{e^{2.5}\cdot x_1} \frac{a}{x}dx - \frac{1}{2}\cdot(2x_1 - x_1)\cdot f(x_1) = [a\cdot \ln x]_{x_1}^{e^{2.5}\cdot x_1} - \frac{1}{2}x_1 \cdot \frac{a}{x_1} = 2a$$

השטח המוגבל על ידי המשיק והצירים הוא: $S = \frac{1}{2}\cdot 2x_1 \cdot c = x_1 \cdot \sqrt{-4ab} = \sqrt{-\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{-4ab} = \sqrt{4a^2} = 2a$

קבלנו כי שני השטחים שווים ל - $2a$.

פתרון שאלה 5

א. (I) $f'(x)=e^{x^2+bx+c}+(2x+b)\cdot x\cdot e^{x^2+bx+c}=e^{x^2+bx+c}\cdot(2x^2+bx+1)$

$f'(x)=0 \leftarrow 2x^2+bx+1=0$

על פי הנתון קיימת רק נקודה אחת אשר בה $f'(x_1)=0$ וכן $x_1>0$ לכן: $2x^2+bx+1=\left(\sqrt{2}x-1\right)^2=0$

ונקבל: $b=-2\sqrt{2}=-\sqrt{8}$.

(II) בנקודה ששיעורה x_1 יש ל - $f(x)$ נקודת קיצון מקומית או נקודת פיתול (גזירה שנייה תראה כי זו נקודת פיתול). לפונקציה את נקודות קיצון נוספות והיא רציפה בכל התחום, לכן יש לפונקציה ולישר נקודת חיתוך אחת.

ב. מסעיף א': $x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}-2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+c}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{c-1\frac{1}{2}}$

מהנתון: $f(x_1)=1$ נקבל $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{c-1\frac{1}{2}}=1 \leftarrow e^{c-1\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \leftarrow c=1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}$.

ג. (I) נרשום את $f(x)$: $f(x)=x\cdot e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}} \leftarrow f'(x)=e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}\cdot\left(2x^2-\sqrt{8}x+1\right)$

כמו כן:

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\cdot e^{2-4+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$f'\left(\sqrt{2}\right)=e^{-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}\cdot(1)=\sqrt{\frac{2}{e}}$$

ומשוואת המשיק היא $y-\frac{2}{\sqrt{e}}=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot\left(x-\sqrt{2}\right) \leftarrow y=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot x$

(II) נשווה בין הפונקציה למשיק ונקבל: $x\cdot e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{e}}\cdot x \leftarrow e^{x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}}$

(צמצמנו ב – X, נזכור עתה כי $x=0$ הוא אחד מפתרונות המשוואה)

לאחר פעולת $\ln$ בשני אגפי המשוואה נקבל $x^2-\sqrt{8}x+1\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}=\ln\sqrt{2}-\frac{1}{2} \leftarrow x^2-\sqrt{8}x+2=0$

למשוואה הריבועית יש פתרון יחיד $\left(x=\sqrt{2}\right)$, לכן למשיק ולפונקציה יש שתי נקודות משותפות.