פתרון שאלה 1

א. מרכז המעגל השמאלי נמצא בנקודה $(kp,0)$ ומחוגו $r=kp$, לכן משוואתו היא:

$$(x-kp)^2+y^2=(kp)^2$$

מרכז המעגל הימני נמצא בנקודה $(kp+2p,0)$ ומחוגו $r=kp$, לכן משוואתו היא:

$$\left[x-(kp+2p)\right]^2+y^2=(kp)^2$$

ב. לנקודות ההשקה של המעגל הימני עם הפרבולה יש אותו שיעור X, לכן השוואה בין המעגל לפרבולה תיתן

משוואה בעלת פתרון יחיד, כלומר $\Delta=0$. נפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y^2=2px \\ \left[x-(kp+2p)\right]^2+y^2=(kp)^2 \end{cases}$$

נקבל $\left[x-(kp+2p)\right]^2+2px=(kp)^2 \rightarrow x^2-2p(k+1)x+4p^2(k+1)=0 \qquad (*)$

נשווה את הדיסקרימיננטה ל – 0 ונקבל:

$$4p^2(k+1)^2-16p^2(k+1)=0 \rightarrow 4p^2(k+1)(k+1-4)=0$$

פתרון המשוואה הוא $k=3$

ג. נמצא את נקודת ההשקה של המעגל הימני (ברביע הראשון).

מ - $(*)$ נקבל $x=\frac{-b}{2a}=p(k+1)=4p$ (נזכור כי $\Delta=0$). שיעור ה – Y בנקודה יתקבל ע"י

הצבה במשוואת הפרבולה $y=\sqrt{2p\cdot 4p}=\sqrt{8}p$. נקודת ההשקה היא $(4p,\sqrt{8}p)$.

נמצא את נקודת החיתוך של המעגל השמאלי עם הפרבולה (ברביע הראשון).

$$(x-kp)^2+2px=(kp)^2 \overset{k=3}{\rightarrow} (x-3p)^2+2px=9p^2 \rightarrow x=4p$$

קבלנו כי שני המעגלים נחתכים בנקודת ההשקה של המעגל הימני, שיעור הנקודה הוא $(4p,\sqrt{8}p)$.

נמצא עתה את שיפועי המשיקים למעגלים בנקודה זו:

מעגל שמאלי: $y=\sqrt{9p^2-(x-3p)^2} \leftarrow y'=\frac{-(x-3p)}{\sqrt{9p^2-(x-3p)^2}} \leftarrow y'(4p)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

הזווית שיוצר המשיק עם ציר ה – X: $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4} \leftarrow \alpha=-19.47^0$

מעגל ימני: שיפוע המשיק למעגל שווה לשיפוע הפרבולה בנקודה, נגזור את משוואת הפרבולה:

$$y=\sqrt{2px} \leftarrow y'=\sqrt{\frac{p}{2x}} \leftarrow y'(4p)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

הזווית שיוצר המשיק עם ציר ה – X: $\tan\beta=\frac{\sqrt{2}}{4} \leftarrow \beta=19.47^0$

תשובה: הזווית בין שני המשיקים למעגלים בנקודת חיתוכם היא $\alpha+\beta=38.94^0$

פתרון שאלה 2

א. נסמן: $|\underset{\to}{w}| = b$

נרשום:

$$\overrightarrow{AC'} = \underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} + \underset{\to}{w} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{BD'} = -\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} + \underset{\to}{w} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{BD'}\right| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD'} = \left(\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} + \underset{\to}{w}\right) \cdot \left(-\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} + \underset{\to}{w}\right) = b^2$$

לכן $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AC'} \cdot \overrightarrow{BD'}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD'}\right|} = \dfrac{b^2}{2a^2 + b^2}$

על סמך הנתון $\left(\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\right)$ נקבל $\dfrac{b^2}{2a^2 + b^2} = \dfrac{1}{2} \;\leftarrow\; b = \sqrt{2} \cdot a$.

תשובה: $|\underset{\to}{w}| = \sqrt{2} \cdot a$.

ב. נרשום:

$$\overrightarrow{BD} = -\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{2} \cdot a$$

$$\overrightarrow{BD'} = -\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} + \underset{\to}{w} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{BD'}\right| = \sqrt{2a^2 + b^2}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'} = \left(-\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v}\right) \cdot \left(-\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} + \underset{\to}{w}\right) = 2a^2$$

לכן $\measuredangle DBD' = 45^0 \;\leftarrow\; \cos\left(\measuredangle DBD'\right) = \dfrac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD'}}{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD'}\right|} = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2}a \cdot 2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ג. (I)

$$\overrightarrow{AM} = \underset{\to}{w} + k\underset{\to}{u} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{AM}\right| = a \cdot \sqrt{k^2 + 2}$$

$$\overrightarrow{MC'} = (1-k)\underset{\to}{u} + \underset{\to}{v} \;\rightarrow\; \left|\overrightarrow{MC'}\right| = a \cdot \sqrt{k^2 - 2k + 2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MC'}\right| = a \cdot \left(\sqrt{k^2 + 2} + \sqrt{k^2 - 2k + 2}\right)$$

(II) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC'} = \left(\underline{w} + k\underline{u}\right) \cdot \left(\left(1-k\right)\underline{u} + \underline{v}\right) = k\left(1-k\right)\underline{u}^2 = k\left(1-k\right)a^2$

$$\cos\left(\sphericalangle AMC'\right) = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MC'}}{\left|\overrightarrow{AM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MC'}\right|} = \frac{k\left(1-k\right)a^2}{a \cdot \sqrt{k^2+2} \cdot a \cdot \sqrt{k^2-2k+2}}$$

נציב $k = \frac{1}{2}$ ונקבל $\cos\left(\sphericalangle AMC'\right) = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)a^2}{a \cdot \sqrt{\frac{1}{4}+2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{1}{4}-1+2}} = \frac{\sqrt{5}}{15}$ $\leftarrow$ $\sphericalangle AMC' = 81.43^0$

(III) נסמן $f\left(k\right) = \left|\overrightarrow{AM}\right| + \left|\overrightarrow{MC'}\right| = a \cdot \left(\sqrt{k^2+2} + \sqrt{k^2-2k+2}\right)$

נקודת מינימום לפונקצית המרחק תתקבל כאשר $f'\left(k\right) = 0$:

$$f'\left(k\right) = a \cdot \left(\frac{k}{\sqrt{k^2+2}} + \frac{k-1}{\sqrt{k^2-2k+2}}\right)$$

הצבת הערך $k = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$ תיתן $f'\left(\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right) = 0$.

(גזירה שנייה והצבה תראה כי אכן מדובר בנקודת מינימום).

<u>הערה:</u> הערך שהתקבל מייצג את הנקודה, M שעבורה המרחק מ – A ל – 'C מינימאלי.

ניתן להוכיח זאת על ידי התבוננות בפריסה (מישור) של התיבה וחיבור קו ישר בין שתי הנקודות.

פתרון שאלה 3

א. נרשום:
$$z^n = \sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot i = 2cis45^0$$
$$w^n = \sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot i = \sqrt{6}cis315^0$$

והפתרון הכללי של כל אחת מהמשוואות הוא:
$$z_k = \sqrt[n]{2}\cdot cis\left(\frac{45^0}{n}+\frac{360^0}{n}\cdot k\right)\ ,\ \left(k=0,1,\dots n-1\right)$$
$$w_k = \sqrt[2n]{6}\cdot cis\left(\frac{315^0}{n}+\frac{360^0}{n}\cdot k\right)\ ,\ \left(k=0,1,\dots n-1\right)$$

ב. (I) הצמוד של z_k הוא $\overline{z_k} = \sqrt[n]{2}\cdot cis\left(-\frac{45^0}{n}-\frac{360^0}{n}\cdot k\right)$.

לכן
$$p_k = \frac{w_k}{\overline{z_k}} = \frac{\sqrt[2n]{6}\cdot cis\left(\frac{315^0}{n}+\frac{360^0}{n}\cdot k\right)}{\sqrt[n]{2}\cdot cis\left(-\frac{45^0}{n}-\frac{360^0}{n}\cdot k\right)} = \sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\left(\frac{360^0}{n}+\frac{720^0}{n}\cdot k\right)$$

נראה כי $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ הוא קבוע (אינו תלוי ב - k):
$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\left(\frac{360^0}{n}+\frac{720^0}{n}\cdot\left(k+1\right)\right)}{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\left(\frac{360^0}{n}+\frac{720^0}{n}\cdot k\right)} = cis\frac{720^0}{n}$$

(II) האיבר הראשון הוא: $p_0 = \sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\frac{360^0}{n}$

מנת הסדרה התקבלה בסעיף (I): $q = cis\frac{720^0}{n}$

(III)
$$S_n = \frac{p_0\cdot\left(q^n-1\right)}{q-1} = \frac{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\frac{360^0}{n}\cdot\left(cis\frac{720^0\cdot n}{n}-1\right)}{cis\frac{720^0}{n}-1} = \frac{\sqrt[2n]{1.5}\cdot cis\frac{360^0}{n}\cdot\cancel{\left(cis720^0-1\right)}}{cis\frac{720^0}{n}-1} = 0$$

סכום איברי הסדרה הוא 0.

(IV)
$$p_0\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{n-1} = p_0q^0\cdot p_0q\cdot p_0q^2\cdot\ldots\cdot p_0q^{n-1} =$$
$$= p_0^n\cdot q^{0+1+2+\ldots+n-1} = p_0^n\cdot q^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \left(\sqrt[2n]{1.5}\right)^n\cdot\left(cis\frac{720^0}{n}\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} =$$
$$= \sqrt{1.5}\cdot cis\left(360^0\left(n-1\right)\right) = \sqrt{1.5}\cdot cis360^0 = \sqrt{1.5}$$

פתרון שאלה 4

א. נתון: $f\left(x\right)=e^{|x|-a}$

$f\left(-x\right)=e^{|-x|-a}=e^{|x|-a}=f\left(x\right)$, לכל $f\left(x\right)$ היא פונקציה זוגית.

ב. (I) עבור $x\geq 0$ מתקבל $f\left(x\right)=e^{x-a}$, עבור $x<0$ מתקבל $f\left(x\right)=e^{-x-a}$.

לכן $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ לכל X.

(II) הפונקציה $g\left(x\right)$ רציפה ב - $x=0$ אם $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(x\right)$.

על פי הנתון $\lim\limits_{x\to 0^+} g\left(x\right)=e^{-a}$ ו - $\lim\limits_{x\to 0^-} g\left(x\right)=e^{-a}$ לכן $g\left(x\right)$ רציפה ב - $x=0$.

(III) נבדוק את נגזרת הפונקציה $g\left(x\right)$ מימין ומשמאל ל - $x=0$:

עבור $x\geq 0$: $g'\left(x\right)=e^{x-a}$ $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g'\left(x\right)=e^{-a}$.

עבור $x<0$: $g'\left(x\right)=-e^{-x-a}$ $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0^-} g'\left(x\right)=-e^{-a}$.

קיבלנו שהנגזרת מימין ל – 0 שונה מהנגזרת משמאל ל – 0, לכן הנגזרת של $g\left(x\right)$ איננה מוגדרת ב - $x=0$.

ג. הפונקציה $f\left(x\right)$ זוגית, לכן $\int_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\cdot\int\limits_{0}^{a} f\left(x\right)dx$. כמו כן, עבור $x\geq 0$

קבלנו בסעיף ב' I כי $e^{|x|-a}=e^{x-a}$. לכן: $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\cdot\int\limits_{0}^{a} g\left(x\right)dx$.

לאחר הצבת הנתונים נקבל: $\int\limits_{-a}^{a} f\left(x\right)dx=2\cdot\int\limits_{0}^{a} e^{x-a}=2\cdot\left[e^{x-a}\right]_{0}^{a}=2\cdot\left(1-e^{-a}\right)=\frac{4}{3}$

לכן, נקבל $a=\ln 3$.

פתרון שאלה 5

נתון: <u>חומר A</u> $M_8=\frac{1}{2}M_0 \leftarrow \frac{1}{2}M_0=M_0\cdot q_A^8 \leftarrow q_A=\sqrt[8]{0.5}$

<u>חומר B</u> $M_{16}=\frac{1}{2}M_0 \leftarrow \frac{1}{2}M_0=M_0\cdot q_B^{16} \leftarrow q_B=\sqrt[16]{0.5}$

דגימה א' (α): כמות חומר A - $1000-M_0$, כמות חומר B - M_0.

כמות החומר הכוללת בדגימה א' כעבור 10 ימים:

$$M_{10(\alpha)}=\left(1000-M_0\right)\cdot q_A^{10}+M_0\cdot q_B^{10}=\left(1000-M_0\right)\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}$$

דגימה ב' (β): כמות חומר A - M_0, כמות חומר B - $1000-M_0$

כמות החומר הכוללת בדגימה ב' כעבור 10 ימים:

$$M_{10(\beta)}=\left(1000-M_0\right)\cdot q_B^{10}+M_0\cdot q_A^{10}=\left(1000-M_0\right)\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}$$

זמן מחצית החיים של חומר A קטן יותר מזמן מחצית החיים של חומר B, לכן הדגימה בה הכמות של חומר A גדולה יותר, מתפרקת מהר יותר. על פי הנתון $M_0>500_{gr}$ לכן דגימה א' מתפרקת מהר יותר מדגימה ב'.

נרשום: $M_{10(\alpha)}=1.18653\cdot M_{10(\beta)}$ ולאחר הצבה, נקבל:

$$\left(1000-M_0\right)\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}=1.18653\cdot\left(1000-M_0\right)\cdot 0.5^{\frac{10}{16}}+M_0\cdot 0.5^{\frac{10}{8}}$$

לאחר פתיחת סוגריים והעברת אגפים, נקבל $M_0=700_{gr}$.