פתרון שאלה 1

א. המישורים ניצבים זה לזה לכן המכפלה הסקלארית של וקטורי הכיוון שלהם שווה ל – 0.

$$\left(A,B,1\tfrac{1}{2}AB\right)\cdot\left(-B,-A,1\tfrac{1}{2}AB+1\right)=0$$
$$\downarrow$$
$$2\tfrac{1}{4}(AB)^2-\tfrac{1}{2}(AB)=0$$
$$\downarrow$$
$$AB=\frac{2}{9}$$

ב. נציב $AB=\frac{2}{9}$ במשוואות המישורים:

$$\begin{cases}\pi_1: & AX+BY+\frac{1}{3}Z+D=0\\ \pi_2: & -BX-AY+\frac{4}{3}Z+D=0\end{cases}$$

מרחק כל אחד מהמישורים מראשית הצירים:

$$\begin{cases}d_1=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+\frac{1}{9}}}\\ d_2=\frac{D}{\sqrt{B^2+A^2+\frac{16}{9}}}\end{cases}\quad d_1=\sqrt{3.5}\cdot d_2\quad A^2+B^2=\frac{5}{9}\quad B=\frac{2}{9A}\quad 81A^4-45A^2+4=0$$

פתרון המשוואה הדו – ריבועית נותן את הפתרונות הבאים: $(A,B)=\left(\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3}\right),\left(\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{3}\right)$

ג. כפי שראינו בסעיף ב' – קיימים 4 זוגות מישורים המקיימים את תנאי הבעיה.

ד. (I) במשוואה של d_1 (בסעיף ב'), נציב $A^2+B^2=\frac{5}{9}$ ונקבל: $d_1=\frac{D}{\sqrt{\frac{5}{9}+\frac{1}{9}}}=\frac{3D}{\sqrt{6}}$.

נשווה לנתון $d_1=3\sqrt{6}$, ונקבל $\frac{3D}{\sqrt{6}}=3\sqrt{6}$ $\leftarrow$ $D=6$.

מהנתון $A+B=1$, $A>B$ ומתוצאת סעיף ב', נקבל: $B=\frac{1}{3}$, $A=\frac{2}{3}$.

משוואות המישורים הן:
$$\begin{cases}\pi_1: & \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z+6=0\\ \pi_2: & -\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z+6=0\end{cases}$$

(II) נמצא שתי נקודות משותפות לשני המישורים: $(-18,18,0)$, $(0,-9,-9)$.

וההצגה הפרמטרית של ישר החיתוך היא $l:\underline{x}=(0,-9,-9)+t\cdot(2,-3,-1)$

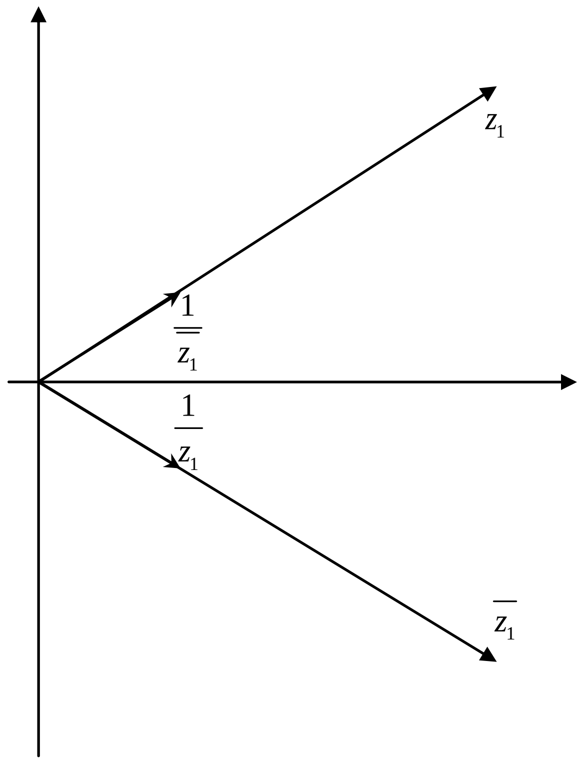
פתרון שאלה 2

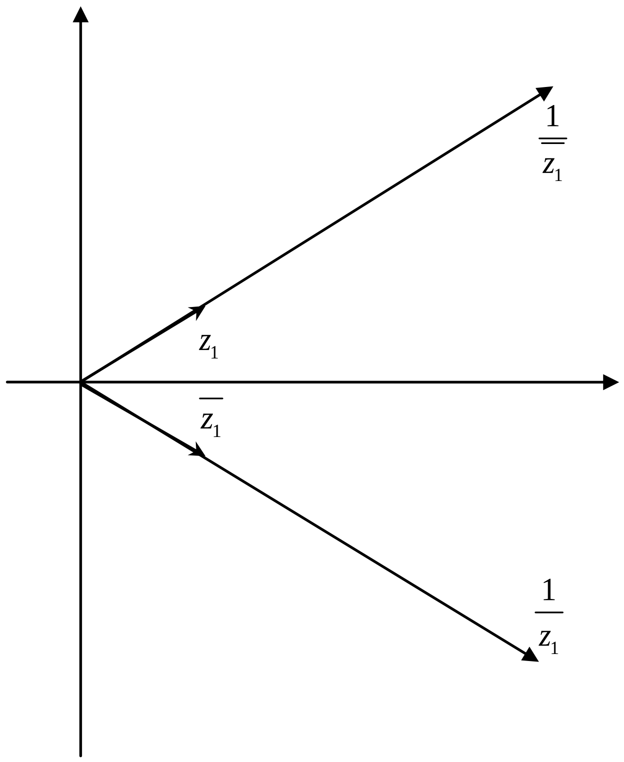
א. (I) $\overline{z_1} = a - bi$

(II) $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{1}{a+bi} \cdot \dfrac{a-bi}{a-bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} \cdot i$

(III) $\dfrac{1}{\overline{z_1}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z_1}\right)} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{b}{a^2+b^2} \cdot i$

ב. $a^2+b^2 > 1 \leftarrow |z_1| > 1$ $\qquad$ $a^2+b^2 < 1 \leftarrow |z_1| < 1$





ג. (I) מהנתון $|z_1|=\sqrt{10}$ נקבל $a^2+b^2=10$.

המרובע הוא טרפז שאורך בסיסו הגדול $z_1\overline{z_1}$ הוא $2b$ ואורך בסיסו הקטן $\frac{1}{z_1}\frac{1}{\overline{z_1}}$ הוא $\frac{2b}{a^2+b^2}$.

גובה הטרפז הוא $H=a-\frac{a}{a^2+b^2}$.

שטח הטרפז הוא: $S=\frac{\left(2b+\frac{2b}{a^2+b^2}\right)\cdot\left(a-\frac{a}{a^2+b^2}\right)}{2}=\left(b+\frac{b}{10}\right)\cdot\left(a-\frac{a}{10}\right)=\frac{99}{100}ab$

נציב $b=\sqrt{10-a^2}$ ונקבל $S(a)=\frac{99}{100}a\cdot\sqrt{10-a^2}=\frac{99}{100}\cdot\sqrt{10a^2-a^4}$.

גזירת פונקצית השטח והשוואה ל – 0 תיתן $a=\sqrt{5}$ $\leftarrow$ $b=\sqrt{5}$.

(II) נציב $a=\sqrt{5}$ ונקבל $S_{\max}=\frac{99}{100}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{99}{20}=4.95$

פתרון שאלה 3

א. נסמן את גובה הפירמידה ב – H, נקבל: $\frac{H}{\frac{1}{2}b}=\tan\alpha$, $\frac{H}{\frac{1}{2}a}=\tan\beta$ $\leftarrow$ $\frac{a}{b}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$

מהנתון $\sin\left(\alpha-\beta\right)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta$

נקבל (תוך שימוש בזהות $\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$):

$\sin\alpha\cos\beta=3\cos\alpha\sin\beta$ $\leftarrow$ $\tan\alpha=3\tan\beta$, לכן $\frac{a}{b}=3$.

ב. נסמן ב – E את אמצע הצלע AB, ממשפט פיתגורס נקבל $\left(SE\right)^2=\frac{3}{4}a^2$, לכן $H^2=\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2$.

נציב $a=3b$ ונקבל $H=\frac{\sqrt{26}\cdot b}{2}$.

$\tan\alpha=\frac{H}{\frac{1}{2}b}=\sqrt{26}$ $\leftarrow$ $\alpha=78.9^0$

פתרון שאלה 4

א. (I) $f(-x)=\left[a\cdot(-x)^2-1\right]\cdot e^{-a\cdot(-x)^2}=\left(ax^2-1\right)\cdot e^{ax^2}=f(x)$ $\leftarrow$ הפונקציה זוגית.

(II) $f'(x)=2ax\cdot e^{-ax^2}+\left(ax^2-1\right)\cdot(-2ax)\cdot e^{-ax^2}=2ax\cdot e^{-ax^2}\cdot\left(2-ax^2\right)$

נמצא את $f'(-x)$: $f'(-x)=-2ax\cdot e^{-ax^2}\cdot\left(2-ax^2\right)=-f'(x)$ $\leftarrow$ הפונקציה הנגזרת היא אי זוגית.

ב. נמצא את שיעורי נקודה t. $f'(t)=0$ $\leftarrow$ $2-at^2=0$ $\leftarrow$ $t=\sqrt{\frac{2}{a}}$.

השטח המוגבל הוא: $S=\int_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}} f'(x)dx=\left[f(x)\right]_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}}=e^{-2}+1\approx1.135$.

ג. נקודות הקיצון המוחלטות הן נקודות הקיצון המקומיות (על פי השרטוט). נמצא את נקודות הקיצון המקומיות של $f'(x)$.

$$f''(x)=\left(2a\cdot e^{-ax^2}-4a^2x^2\cdot e^{-ax^2}\right)\cdot\left(2-ax^2\right)-4a^2x^2\cdot e^{-ax^2}=2a\cdot e^{-ax^2}\cdot\left(2a^2x^4-7ax^2+2\right)$$

השוואה ל – 0 תיתן: $2a^2x^4-7ax^2+2=0$. למשוואה זו 4 פתרונות אשר שניים מהם חיוביים.

$x_1=\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{4a}}$, $x_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{4a}}$, על פי הנתון $x_2-x_1=\sqrt{\frac{1}{2}}$ לכן $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{33}}{4a}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{33}}{4a}}$

פתרון המשוואה נותן $a=3$.

ד. (I) מסעיף ב': $t=\sqrt{\frac{2}{a}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

(II) ל - $f(x)$ יש שתי נקודות קיצון, ב - t וב - $-t$ ($f(x)$ זוגית) ונקודה נוספת ב - $x=0$.

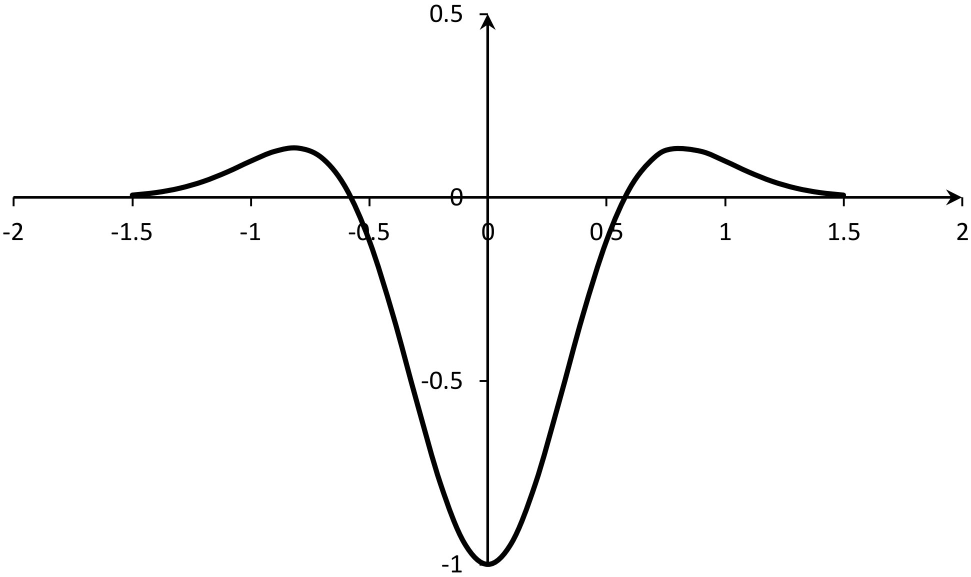
נמצא את $f(t)$: $f(t)=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\left(3\cdot\frac{2}{3}-1\right)\cdot e^{-3\cdot\frac{2}{3}}=e^{-2}$.

מהתבוננות בגרף הנגזרת ניתן לקבוע את סוגי נקודות הקיצון.

$$\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}},e^{-2}\right)_{\max}\ ,\ (0,-1)_{\min}\ ,\ \left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}},e^{-2}\right)_{\max}$$

(III)   נקודות חיתוך הצירים הן: $\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}},0\right)$, $\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}},0\right)$, $(0,-1)$

ה.



פתרון שאלה 5

א. הפונקציה $g\left(a,b\right)$ מחשבת את נפח הגוף המתקבל מסיבוב גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ סביב ציר ה – X כאשר היא מוגבלת על ידי הישרים $x=a+1$, $x=a-1$.

ב. (I)

$$g\left(a,b\right)=\pi\cdot\int_{a-1}^{a+1}\frac{a}{ax+b}dx=\pi\cdot\left[\ln\left(ax+b\right)\right]_{a-1}^{a+1}=$$
$$=\pi\cdot\left[\ln\left(a^2+a+b\right)-\ln\left(a^2-a+b\right)\right]=\pi\cdot\ln\left(\frac{a^2+a+b}{a^2-a+b}\right)$$

(II) $g\left(a,b\right)$ היא אינטגרל של פונקציה ריבועית ולכן חיובית תמיד!

ג. נגזור לפי a (הפרמטר b קבוע), נקבל

$$g'_{(a)}\left(a,b\right)=\pi\cdot\frac{a^2-a+b}{a^2+a+b}\cdot\frac{\left(2a+1\right)\cdot\left(a^2-a+b\right)-\left(2a-1\right)\cdot\left(a^2+a+b\right)}{\left(a^2-a+b\right)^2}=$$
$$=\pi\cdot\frac{2b-2a^2}{\left(a^2+b\right)^2-a^2}$$

השוואה ל – 0 תיתן $b=a^2$.

נציב ב - $g\left(a,b\right)$ ונקבל $g\left(a,b\right)=g\left(a,a^2\right)=\pi\cdot\ln\left(\frac{2a^2+a}{2a^2-a}\right)=\pi\cdot\ln\left(\frac{2a+1}{2a-1}\right)$.

השוואה לנתון: $\frac{2a+1}{2a-1}=2 \leftarrow a=1\frac{1}{2} \leftarrow b=2\frac{1}{4}$