## פתרון שאלה 1

א. נקודת ההשקה היא $\left(x_1,\sqrt{12x_1}\right)$.

נגזרת הפונקציה $y=\sqrt{12x}$ היא $y'=\frac{12}{2\sqrt{12x}}=\sqrt{\frac{3}{x}}$ ושיפוע המשיק הוא לכן $m=\sqrt{\frac{3}{x_1}}$.

משוואת המשיק: $y-\sqrt{12x_1}=\sqrt{\frac{3}{x_1}}\cdot\left(x-x_1\right) \leftarrow y=\sqrt{\frac{3}{x_1}}\cdot x+\sqrt{3x_1}$

ב. ( I ) נמצא את נקודת החיתוך של הישר והמעגל: $\left(x+a\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{x_1}}\cdot x+\sqrt{3x_1}\right)^2=a^2$

לאחר פתיחת הסוגריים וכינוס איברים דומים מתקבלת המשוואה הריבועית:

$$\left(x_1+3\right)\cdot x^2+2x_1\left(a+3\right)\cdot x+3x_1^2=0 \qquad (*)$$

למעגל ולמשיק יש נקודת משותפת אחת, לכן נדרוש פתרון יחיד למשוואה הריבועית, כלומר $\Delta=0$.

נקבל $\left(2x_1\left(a+3\right)\right)^2-4\left(x_1+3\right)\cdot3x_1^2=0$. לאחר סידור המשוואה וחילוץ $a$ נקבל $a=\sqrt{3x_1+9}-3$

( II ) נמצא את הפתרון היחיד של $(*)$: $x_B=\frac{-2x_1\left(a+3\right)}{2\left(x_1+3\right)}=\frac{-2x_1\cdot\sqrt{3x_1+9}}{2\left(x_1+3\right)}=-\sqrt{\frac{3x_1^2}{x_1+3}}$.

שיעור ה – Y בנקודה B יתקבל על ידי הצבה במשוואת המשיק.

תשובה: $B\left(-\sqrt{\frac{3x_1^2}{x_1+3}}\ ,\ \sqrt{3x_1}-\sqrt{\frac{3x_1}{x_1+3}}\right)$

ג. הנקודה B מחלקת את הקטע AD כך שמתקיים

$$\frac{AB}{BD}=3 \leftarrow x_A-x_B=3\cdot\left(x_B-x_D\right) \leftarrow x_A+3x_D=4x_B \qquad (**).$$

נמצא את שיעורי נקודה D: חיתוך המשיק עם ציר ה – X נותן $x_D=-x_1$

הצבת ערכי X ב - $(**)$ נותנת: $x_1+3\cdot\left(-x_1\right)=-4\cdot\sqrt{\frac{3x_1^2}{x_1+3}} \leftarrow x_1=9$

## פתרון שאלה 2

א. נסמן את נקודה C: $C\left(x_1, y_1, z_1\right)$ (נקבל כך כמובן גם את נקודה D).

מתקיימים מספר תנאים:

( I ) הנקודה C נמצאת במישור $\pi$ : $3x_1 - 2y_1 + 6z_1 - 10 = 0$

( II ) המכפלה הסקלרית בין וקטור הכיוון של הרדיוס AC והמשיך BC שווה ל – 0:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \leftarrow \left(x_1 - 2, y_1 + 2, z_1\right) \cdot \left(x_1 + 8, y_1 - 10\tfrac{1}{2}, z_1 - 9\tfrac{1}{6}\right) = 0$$

( III ) המרחק מנקודה A לנקודה C שווה לרדיוס המעגל: $\left(x_1 - 2\right)^2 + \left(y_1 + 2\right)^2 + z_1^2 = \left(5\tfrac{5}{6}\right)^2$

פתרון מערכת המשוואות נותן את הפתרון הפרמטרי: $\left(x_1, y_1, z_1\right) = \left(k\,,\ \dfrac{15k - 27}{16}\,,\ \dfrac{53 - 9k}{48}\right)$

ואת המשוואה הריבועית $k^2 - 2k - 15 = 0 \leftarrow (k-5)(k+3) = 0 \leftarrow k_1 = 5\ ,\ k_2 = -3$

הצבת ערכי $k$ שהתקבלו נותנים את שיעורי שתי נקודות ההשקה: $C\left(5, 3, \tfrac{1}{6}\right)\ ,\ D\left(-3, -4\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{2}{3}\right)$

ב.

$$\overrightarrow{AB} = \left(-10, 12\tfrac{1}{2}, 9\tfrac{1}{6}\right)$$
$$\overrightarrow{CD} = \left(-8, -7\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}\right)$$

והמכפלה הסקלרית היא $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \left(-10, 12\tfrac{1}{2}, 9\tfrac{1}{6}\right) \cdot \left(-8, -7\tfrac{1}{2}, 1\tfrac{1}{2}\right) = 80 - 93\tfrac{3}{4} + 13\tfrac{3}{4} = 0$

## פתרון שאלה 3

נפתור באמצעות וקטורים.

א. נסמן: $\overrightarrow{AB}=\underset{\rightarrow}{u}$ , $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$ , $\overrightarrow{AA'}=\underset{\rightarrow}{w}$ ; $\overrightarrow{BE}=t\cdot\underset{\rightarrow}{v}$ , $\overrightarrow{D'F}=s\cdot\underset{\rightarrow}{u}$

נביע את הוקטורים $\overrightarrow{BF}$ ו - $\overrightarrow{DE}$:

$$\overrightarrow{BF}=\underset{\rightarrow}{u}(s-1)+\underset{\rightarrow}{v}+\underset{\rightarrow}{w}$$
$$\overrightarrow{DE}=\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{v}(t-1)+\underset{\rightarrow}{w}$$

על פי הנתון BEFD הוא מרובע וכל קודקודיו נמצאים במישור אחד, לכן אלכסוניו נחתכים.

נסמן את נקודת מפגש האלכסונים באות M. מתקיים: $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BD}$ .

נסמן: $\overrightarrow{BM}=k\cdot\overrightarrow{BF}$ , $\overrightarrow{DM}=r\cdot\overrightarrow{DE}$ , נקבל: $k\cdot\left[\underset{\rightarrow}{u}(s-1)+\underset{\rightarrow}{v}+\underset{\rightarrow}{w}\right]-r\cdot\left[\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{v}(t-1)+\underset{\rightarrow}{w}\right]=-\underset{\rightarrow}{u}+\underset{\rightarrow}{v}$

לאחר סידור והשוואת מקדמים נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} k(s-1)-r=-1 \\ k-r(t-1)=1 \\ k-r=0 \end{cases}$$

פתרון המערכת נותן $t=s$ .

לכן $BE=D'F \leftarrow BE=DF$

כמו כן ברור כי $FE||BD$ (נמצאים על מישורים מקבילים).

לכן מרובע BEFD הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. נסמן ב – G את אמצע FE וב – P את אמצע BD.

$$\overrightarrow{FG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}=\frac{1}{2}\left[\underset{\rightarrow}{u}(1-t)+\underset{\rightarrow}{v}(t-1)\right]$$
$$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\left(\underset{\rightarrow}{u}-\underset{\rightarrow}{v}\right)$$

נביע עתה את $\overrightarrow{GP}$ : $\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DP}=-\frac{1}{2}t\left(\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}\right)-\underset{\to}{w}$

על פי הנתון (הזווית בין מישור BEFD למישור ABCD היא $\alpha$), $\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{PG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\alpha$

נציב ונקבל: $\left[\frac{1}{2}t\left(\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}\right)+\underset{\to}{w}\right]\cdot\left(\underset{\to}{u}+\underset{\to}{v}\right)=\sqrt{\frac{1}{4}t^2\left(\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2\right)+\underset{\to}{w}^2}\cdot\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2}\cdot\cos\alpha$

או: $\frac{1}{2}t\left(\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2\right)=\sqrt{\frac{1}{4}t^2\left(\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2\right)+\underset{\to}{w}^2}\cdot\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2}\cdot\cos\alpha$

נציב: $\left|\underset{\to}{w}\right|=b$ , $\left|\underset{\to}{u}\right|=\left|\underset{\to}{v}\right|=a$ ונקבל $\frac{1}{2}t\cdot 2a^2=\sqrt{\frac{1}{4}t^2\cdot 2a^2+b^2}\cdot\sqrt{2a^2}\cdot\cos\alpha$

ולאחר סידור $\cos\alpha=\frac{ta}{\sqrt{t^2a^2+2b^2}} \leftarrow t^2=\frac{2b^2}{a^2\cdot\tan^2\alpha} \qquad (*)$

נביע עתה את אורכי הבסיסים של הטרפז ואת גובה הטרפז.

$$\left|\overrightarrow{FE}\right|=\sqrt{(1-t)^2\underset{\to}{u}^2+(t-1)^2\underset{\to}{v}^2}=\sqrt{2}\cdot(1-t)\cdot a$$

$$(**) \qquad \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{\underset{\to}{u}^2+\underset{\to}{v}^2}=\sqrt{2}\cdot a$$

$$\left|\overrightarrow{GP}\right|=\sqrt{\tfrac{1}{2}t^2a^2+b^2}$$

שטח הטרפז הוא: $S_{BEFD}=\frac{1}{2}\cdot\left(\left|\overrightarrow{FE}\right|+\left|\overrightarrow{BD}\right|\right)\cdot\left|\overrightarrow{GP}\right|=\frac{\sqrt{2}a}{2}(2-t)\cdot\frac{\sqrt{t^2a^2+2b^2}}{\sqrt{2}}$

ולאחר הצבה של $(*)$ נקבל: $S_{BEFD}=\frac{b\cdot\left(\sqrt{2}a-b\cot\alpha\right)}{\sin\alpha}$

ג. ( I ) עבור $t=1$ הקודקודים E, F ו – 'C מתלכדים ואז הזווית $\alpha$ מינימלית.

נציב ב - $(*)$ $t=1$ ונקבל: $\cos\alpha_{\min}=\frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+8a^2}}=\frac{1}{3}$

לכן $\alpha_{\min}=70.53^0$

תשובה: $70.53^0<\alpha\le 90^0$

( II ) נסמן $EC'=FC'=d$ .

את נפח הפירמידה הקטומה ניתן לחשב על ידי חיסור נפחים של הפירמידה המשלימה (החלק הקטום) מהפירמידה השלמה (הקטומה ועוד החלק הקטום). מדמיון משולשים ומעט עבודה אלגברית נוכל לראות כי נפח הפירמידה הקטומה נתון בביטוי הבא: $V_P=\frac{1}{3}a\cdot\left(a^2+ad+d^2\right)$.

נפח התיבה הוא $V_T=2a^3$.

יחס הנפחים הוא 3, לכן נוכל לרשום $\frac{2a^3}{\frac{1}{3}a\cdot\left(a^2+ad+d^2\right)}=3$.

לאחר סידור המשוואה נקבל: $d^2+ad-a^2=0$ שפתרונה הוא $d=\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$

כמו כן $d=a\left(1-t\right)$ לכן $t=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. הצבה ב - $(*)$ ופתרון המשוואה נותן $\alpha=82.3^0$.

## פתרון שאלה 4

א. לגרף ב' יש שתי נקודות קיצון ולגרף א' יש שתי נקודות חיתוך עם ציר X.

לכן גרף א' מתאר את הפונקציה $g(x)$ וגרף ב' מתאר את $f(x)$ .

ב. (I) נקודות הקיצון של $f(x)$ :

$$\tan x = 1 \leftarrow \cos x - \sin x = 0 \xleftarrow{f'(x)=0} f'(x) = (\cos x - \sin x)\cdot e^{(\sin x + \cos x)}$$

הפתרונות בתחום הנתון הם: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ , $x_2 = \frac{5\pi}{4}$

נקבע את סוג הנקודות ע"י גזירה שנייה:

$$(*) \qquad f''(x) = (-\sin x - \cos x)\cdot e^{(\sin x + \cos x)} + (\cos x - \sin x)^2 \cdot e^{(\sin x + \cos x)} = \\ = e^{(\sin x + \cos x)} \cdot \left(-\sin x - \cos x + (\cos x - \sin x)^2\right)$$

נציב את ערכי X בפונקציה ובנגזרת השנייה ונקבל: $\left(\frac{\pi}{4}, 4.11\right)_{\max}$ , $\left(\frac{5\pi}{4}, 0.243\right)_{\min}$

נקודות הקיצון של $g(x)$ :

הנגזרת השנייה של $f(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $g(x)$ . מ - $(*)$ נקבל:

$$g'(x) = (-\sin x - \cos x)\cdot e^{(\sin x + \cos x)} + (\cos x - \sin x)^2 \cdot e^{(\sin x + \cos x)} = \\ = e^{(\sin x + \cos x)} \cdot \left(-\sin x - \cos x + (\cos x - \sin x)^2\right)$$

השוואת הנגזרת ל – 0 נותנת $-\sin x - \cos x + (\cos x - \sin x)^2 = 0$ .

כדי לפתור משוואה זו, נעביר אגפים ונעלה בריבוע, נקבל

$$(\sin x + \cos x)^2 = (1 - 2\sin x \cos x)^2 \xleftarrow{\wedge 2} \sin x + \cos x = 1 - 2\sin x \cos x$$

לאחר פתיחת סוגריים נקבל

$$\sin^2 2x - 3\sin 2x = 0 \xleftarrow{2\sin x \cos x = \sin 2x} 1 + 2\sin x \cos x = 1 - 4\sin x \cos x + 4\sin^2 x \cos^2 x$$

פתרון המשוואה הוא $x=\frac{\pi}{2}\cdot k$ . (נזכור כי העלינו בריבוע, לכן ייתכנו פתרונות שאינם נכונים).

לאחר בדיקת הפתרונות ומציאת שיעורי ה – Y ובחינת סוג נקודת הקיצון, נקבל: $\left(\frac{\pi}{2},-e\right)_{\min}$

( II ) נשווה את $f\left(x\right)$ ו - $g\left(x\right)$: $e^{(\sin x+\cos x)}=\left(\cos x-\sin x\right)\cdot e^{(\sin x+\cos x)}$

נקבל: $\cos x-\sin x=1 \overset{\wedge 2}{\leftarrow} \sin 2x=0 \leftarrow x=\frac{\pi}{2}\cdot k$ .

לאחר בדיקה (חייבים לבדוק כי העלינו בריבוע) נקבל את נקודות החיתוך $\left(0,\,e\right)$ , $\left(\frac{3\pi}{2},\frac{1}{e}\right)$

ג. נמצאת את משוואת הישר: $-\frac{1}{2}\approx m=\frac{e-\frac{1}{e}}{-\frac{3\pi}{2}} \leftarrow y=-\frac{1}{2}x+e$

השטח המוגבל הוא: $9.6\approx \left[-\frac{1}{4}x^2+ex+f\left(x\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = S=\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\left[-\frac{1}{2}x+e-f'\left(x\right)\right]dx$

## פתרון שאלה 5

א. נגזור ונקבל: $f'(x)=e^{-x^2}-2x\cdot(x+a)\cdot e^{-x^2}=-e^{-x^2}\cdot(2x^2+2ax-1)$

השוואת הנגזרת ל – 0 נותנת $x^2+ax-0.5=0$ .

למשוואה הריבועית שהתקבלה יש שני שורשים שונים כי $\Delta=a^2+2>0$ .

ב. ( I ) נמצא את פתרונות המשוואה הריבועית: $x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+2}}{2}$

נרשום $x_1-x_2=\frac{-a+\sqrt{a^2+2}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2+2}}{2}=\sqrt{a^2+2}$

נשווה לנתון ונקבל $\sqrt{a^2+2}=1\frac{1}{2}$ $\leftarrow$ $a_1=\frac{1}{2}$ , $a_2=-\frac{1}{2}$

( II ) הצבת $a=-0.5$ , $f(x)=(x-0.5)\cdot e^{-x^2}$

$f'(x)=-e^{-x^2}\cdot(2x^2-x-1)$ .

נקודות הקיצון מתקבלות עבור $2x^2-x-1=0$ . מקבלים: $x_1=1$ , $x_2=-\frac{1}{2}$ .

לאחר הצבה בפונקציה ובדיקת סוגי הנקודות מקבלים $(-0.5,-e^{-0.25})_{\min}$ , $(1,\ 0.5e^{-1})_{\max}$ .

( III ) חיתוך ציר X: $(x-0.5)\cdot e^{-x^2}=0$ $\leftarrow$ $x=0.5$

חיתוך ציר Y: $f(0)=(0-0.5)\cdot e^0=-0.5$

נקודות החיתוך הן: $(0,-0.5)$ , $(0.5,0)$ .

( IV ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{\pm\infty}{\infty}$

גבול מסוג זה ניתן לפתור על ידי גזירה של המונה והמכנה בנפרד ובדיקה 'מחודשת' של הגבול המתקבל

(כלל זה נקרה כלל לופיטל).

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-0.5}{e^{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-0.5)'}{\left(e^{x^2}\right)'}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}}=0$$

האסימפטוטה האופקית היא $y=0$ .

ג.