פתרון שאלה 1

א) נציב $y=ax+b$ במשוואת הפרבולה: $(ax+b)^2=2px$. הישר עובר במוקד הפרבולה, לכן $b=-\frac{1}{2}ap$.

לאחר הצבה ופתיחת סוגריים נקבל את המשוואה הריבועית $a^2x^2-p(a^2+2)x+\frac{1}{4}p^2a^2=0$.

פתרון המשוואה: $$x_{1,2}=\frac{p(a^2+2)\pm2p\sqrt{a^2+1}}{2a^2}$$

$a>0$ ונקודה A נמצאת ברביע הראשון לכן שיעור ה – X שלה הוא $x_A=\frac{p}{a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right)$

ושיעור ה – Y הוא $y_A=\frac{p}{a}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)$.

תשובה: $A\left(\frac{p}{a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right),\frac{p}{a}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$

ב) שיעורי אמצע הקטע AC הם $D\left(\frac{p}{2a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right),\frac{p}{a}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)\right)$

נרשום את $\frac{y_D^2}{x_D}$ ונקבל: $$\frac{y_D^2}{x_D}=\frac{\frac{p^2}{a^2}\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)^2}{\frac{p}{2a^2}\left(\frac{1}{2}a^2+1+\sqrt{a^2+1}\right)}=4p$$

ומשוואת המקום הגיאומטרי היא $y^2=4px$.

פתרון שאלה 2

א) בסיס הפירמידה נמצא במישור XY לכן נפתור סעיף זה בכלים של גיאומטריה אנליטית.

מפגש האלכסונים של בסיס הפירמידה: $F\left(5,4,0\right)$ (אלו גם שיעורי ה – X וה – Y של קודקוד S).

שיפוע האלכסון AC: $m_{AC}=\frac{1-7}{4-6}=3$. שיפוע האלכסון BD: $m_{BD}=-\frac{1}{3}$.

משוואת האלכסון BD: $y=-\frac{1}{3}x+5\frac{2}{3}$.

אורך מחצית האלכסון: $d_{CF}=\sqrt{\left(6-5\right)^2+\left(7-4\right)^2}=\sqrt{10}$

נמצא עתה את הנקודות על הישר BD שמרחקן מנקודה F הוא $\sqrt{10}$ (נקודות אלו הן הקודקודים B ו – D).

$\sqrt{10}=\sqrt{\left(x-5\right)^2+\left(-\frac{1}{3}x+5\frac{2}{3}-4\right)^2}$.

נקבל: $x_B=8$, $x_D=2$, נציב במשוואת BD ונקבל את שיעורי ה – Y של שני הקודקודים.

תשובה: $S\left(5,4,5\right)$, $B\left(8,3,0\right)$, $D\left(2,5,0\right)$

ב) משוואת מישור ABS: נרשום $ax+by+cz+d=0$ ונציב את נקודות A , B ו – S, נקבל:

$$\begin{cases}4a+b+d=0\\8a+3b+d=0\\5a+4b+5c+d=0\end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $\pi_{ABS}:\quad x-2y+z-2=0$

משוואת מישור BCS: נרשום $ax+by+cz+d=0$ ונציב את נקודות B , C ו – S, נקבל:

$$\begin{cases}8a+3b+d=0\\6a+7b+d=0\\5a+4b+5c+d=0\end{cases}$$

פתרון מערכת המשוואות נותן: $\pi_{BCS}:\quad 2x+y+z-19=0$

ג) הזווית בין הפאות ABS ו – BCS:

נמצא את הזווית בין וקטורי הכיוון של המישורים $\left(2,1,1\right)$, $\left(1,-2,1\right)$.

$\cos\alpha=\frac{\left(1,-2,1\right)\cdot\left(2,1,1\right)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{6}$, ונקבל $\alpha=80.4^0$.

הזווית בין הפאות משלימה לזווית שטוחה ולכן שווה ל - 99.6^0.

ד) וקטור הכיוון BS הוא: $\overrightarrow{BS}=\left(-3,1,5\right)$,

שיעור נקודה E הם: $E\left(8-3t,3+t,5t\right)$,

ווקטור הכיוון של DE הוא: $\overrightarrow{DE}=\left(6-3t,-2+t,5t\right)$,

מתקיים: $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BS}=0 \leftarrow \left(-3,1,5\right)\cdot\left(6-3t,-2+t,5t\right)=0 \leftarrow t=\frac{4}{7}$

ושיעורי נקודה E הם: $E\left(6\tfrac{2}{7},3\tfrac{4}{7},2\tfrac{6}{7}\right)$.

פתרון שאלה 3

א) נרשום $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$. נציב ונקבל:

$$\left|\frac{z-iz}{z+i\bar{z}}\right|=\left|\frac{x+iy-ix+y}{x+iy+ix+y}\right|=\left|\frac{(x+y)+i(y-x)}{(x+y)+i(y+x)}\right|=$$

$$=\frac{\left|(x+y)+i(y-x)\right|}{\left|(x+y)+i(y+x)\right|}=\frac{\sqrt{(x+y)^2+(y-x)^2}}{\sqrt{(x+y)^2+(y+x)^2}}=\frac{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}{(x+y)\cdot\sqrt{2}}$$

נשווה לנתון ונקבל: $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}{(x+y)\cdot\sqrt{2}}$ $\leftarrow$ $y=x$

תשובה: המקום הגיאומטרי הוא הישר $y=x$.

ב) המרחק המינימאלי הוא מרחק הנקודה $(2,1)$ מהישר $x-y=0$: $d=\left|\frac{2-1}{\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

פתרון שאלה 4

א) $c>0$ לכן $x^2+c>0$, נדרוש: $x+\sqrt{x^2+c}>0$ ונקבל כל X.

ב) $$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}$$

ג) $g(x)$ חיובית לכל X.

$$\int_{-c}^{c}g(x)dx=\int_{-c}^{c}\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+c}\right)\right]_{-c}^{c}=\ln\left(c+\sqrt{c^2+c}\right)-\ln\left(-c+\sqrt{c^2+c}\right)=\ln\frac{c+\sqrt{c^2+c}}{-c+\sqrt{c^2+c}}$$

נשווה את הביטוי שקבלנו ל – 1: $\ln\frac{c+\sqrt{c^2+c}}{-c+\sqrt{c^2+c}}=1$ $\leftarrow$ $\frac{c+\sqrt{c^2+c}}{-c+\sqrt{c^2+c}}=e$.

פתרון המשוואה האחרונה נותן $c=\frac{(e-1)^2}{4e}$

פתרון שאלה 5

זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מתקבל מהביטוי $\frac{1}{2}m_0 = m_0 \cdot q^T$.

חילוץ T מהמשוואה נותן: $T = \frac{\ln 0.5}{\ln q}$

עבור חומר א': $T = \frac{\ln 0.5}{\ln q_A}$,   עבור חומר ב': $T_B = 3T = \frac{\ln 0.5}{\ln q_B}$

משתי המשוואות נקבל $q_A = q_B^3$.

נרשום עתה משוואה המתארת את הכמות הכוללת כתלות בזמן: $m_t = m_0 \cdot q_A^t + m_0 \cdot q_B^t$

נציב $m_t = m_0$ וכן $q_A = q_B^3$ ונקבל: $m_0 = m_0 \cdot q_B^{3t} + m_0 \cdot q_B^t$ $\leftarrow$ $\left(q_B^t\right)^3 + q_B^t - 1 = 0$

מהתבוננות בגרף המצורף נראה כי פתרון המשוואה הוא $q_B^t = 0.68$

נקבל $t = \frac{\ln 0.68}{\ln q_B} = \frac{3T \cdot \ln 0.68}{\ln 0.5} = 1.669 \cdot T$

תשובה: כעבור $1.669 \cdot T$ תיוותר כמות של m_0 משני החומרים יחד.